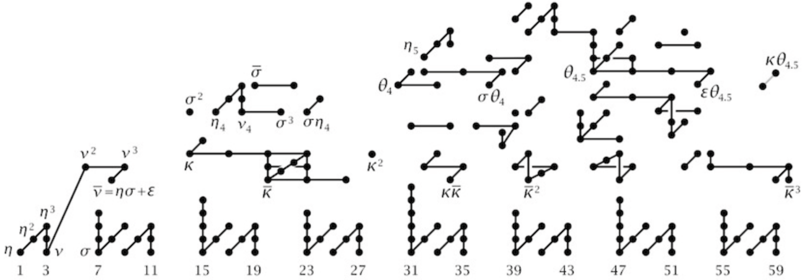
Декабрьские чтения в Томске, 6–11 декабря 2021

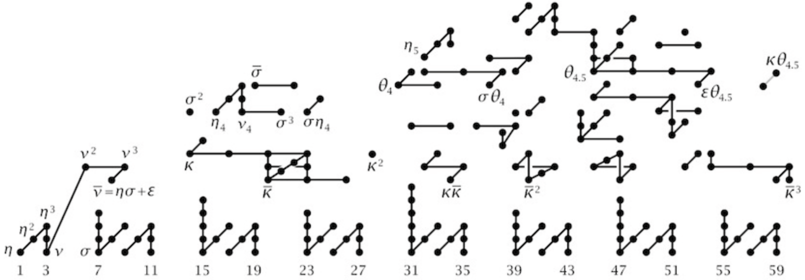
Об алгебре Стинрода mod $p > 2$

Ф.Ю.Попеленский
мехмат МГУ

Томск, 2021

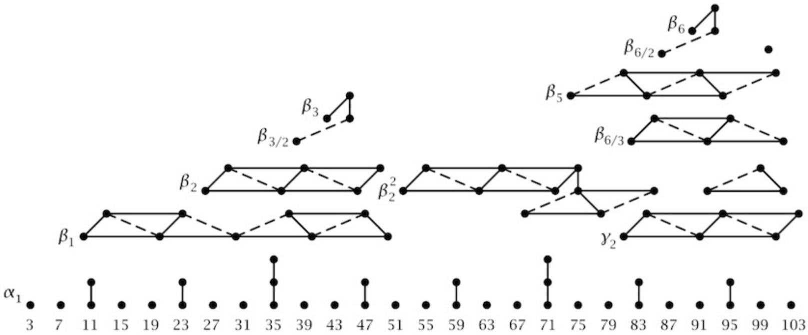

η
η²
η³
ν
ν²
ν³
ν̄ = ησ + ε
σ
σ²
σ̄
η₄
ν₄
σ³
ση₄
κ
κ̄
κ²
κκ̄
κ̄²
κ̄³
η₅
θ₄
σθ₄
θ₄.₅
εθ₄.₅
κθ₄.₅
1
3
7
11
15
19
23
27
31
35
39
43
47
51
55
59

$p = 2$



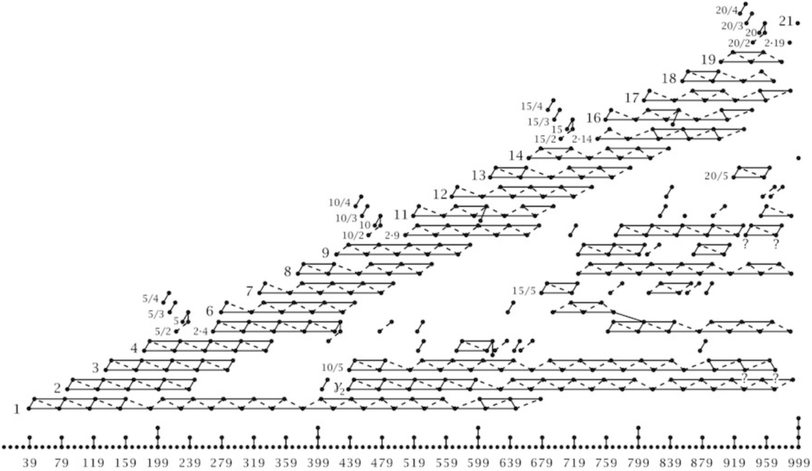
$$p = 2$$

$$\pi_k^s = \lim \pi_{k+i}(S^i)$$



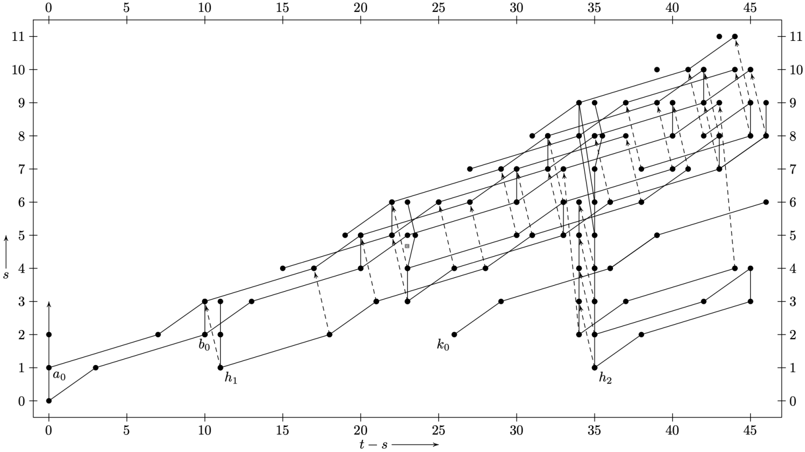
β_6
$\beta_{6/2}$
β_5
$\beta_{6/3}$
β_3
$\beta_{3/2}$
β_2
β_2^2
β_1
γ_2
α_1
3 7 11 15 19 23 27 31 35 39 43 47 51 55 59 63 67 71 75 79 83 87 91 95 99 103

$p = 3$

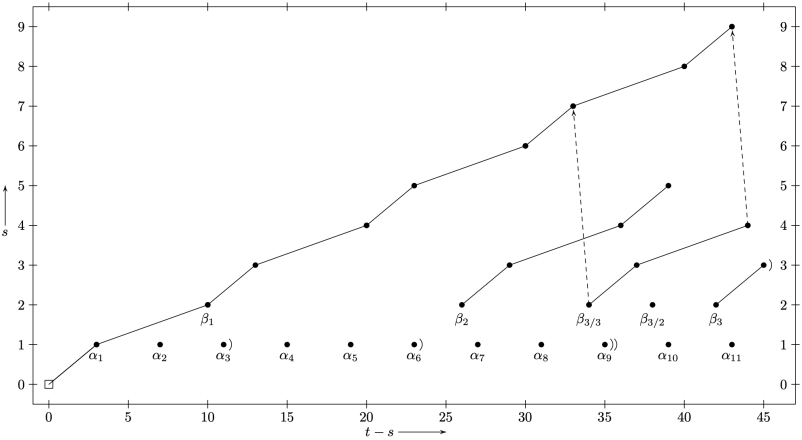


20/4
20/3
20
20/2
2·19
21
19
18
17
15/4
15/3
15
15/2
2·14
16
14
13
20/5
12
10/4
10/3
10
10/2
2·9
11
?
?
9
8
7
15/5
5/4
5/3
5
5/2
2·4
6
4
3
10/5
2
γ_2
?
?
1
39
79
119
159
199
239
279
319
359
399
439
479
519
559
599
639
679
719
759
799
839
879
919
959
999

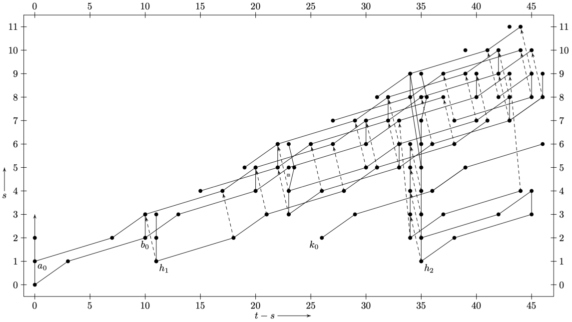
$p = 5$



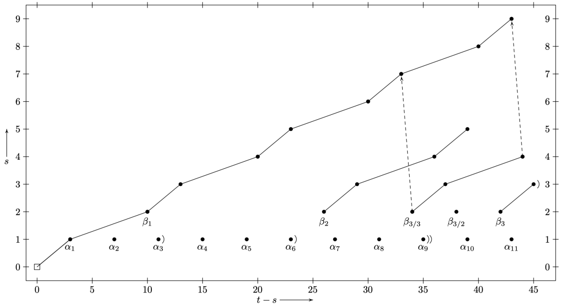
$E_2 = \bigoplus E_2^{s,t}$ спектральной последовательности Адамса, $p = 3$



$E_2 = \bigoplus E_2^{s,t}$ спектральной последовательности Адамса–Новикова, $p = 3$



a_0
b_0
h_1
k_0
h_2
s
$t-s$

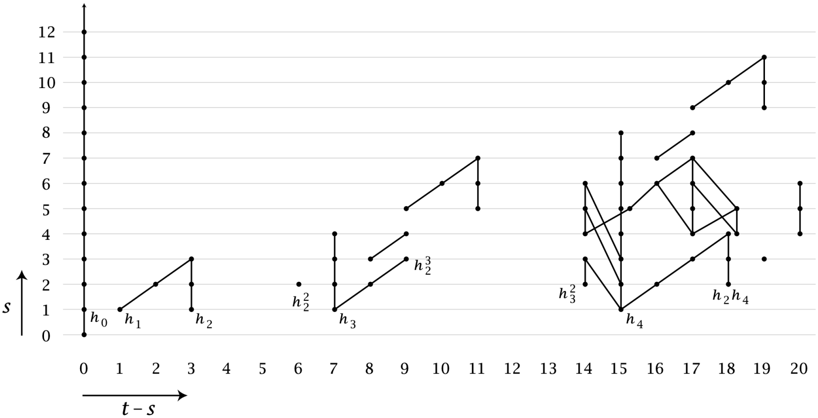


β_1
β_2
$\beta_{3/3}$
$\beta_{3/2}$
β_3
α_1
α_2
α_3
α_4
α_5
α_6
α_7
α_8
α_9
α_{10}
α_{11}
s
$t-s$

- J.F.Adams, «On the structure and applications of the Steenrod algebra» (1958) Comm. Math. Helv
- С.П.Новиков, «Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов» (1967) Изв. АН

- J.F.Adams, «On the structure and applications of the Steenrod algebra» (1958) Comm. Math. Helv
- С.П.Новиков, «Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов» (1967) Изв. АН

- H.Toda, «On exact sequences in Steenrod algebra mod 2» (1958) Mem. of the College of Sciences, Univ. Kyoto
– Комментарий: H.Toda, "Composition methods in homotopy groups of spheres"(1962) и H.Toda, «p-primary components of homotopy groups» (1958-1959) Mem. of the College of Sciences, Univ. Kyoto
- C.T.C.Wall «Generators and relations for the Steenrod algebra» (1960) Ann. of Math.



$E_2 = \bigoplus E_2^{s,t}$ спектральной последовательности Адамса, $p = 2$

Definition

Алгебра Стинрода A_2 mod 2:

- над $\mathbb{Z}/2$
- образующие: $Sq^0 = 1, Sq^1, Sq^2, \ldots$ $\qquad \deg Sq^k = k$
- соотношения Адема:

$$\text{for } a < 2b: \quad Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j$$

Заметим, что в правой части $a + b - j \geq 2j$

Definition

Алгебра Стинрода A_p, $p > 2$ простое:

- над $\mathbb{Z}/p$
- образующие: $\beta, P^0 = 1, P^1, \ldots$; $\deg P^k = 2(p-1)k, \deg \beta = 1.$

Definition

Алгебра Стинрода A_p, $p > 2$ простое:

- над $\mathbb{Z}/p$
- образующие: $\beta, P^0 = 1, P^1, \ldots;$ $\deg P^k = 2(p-1)k, \deg \beta = 1.$
- $\beta^2 = 0$ и соотношения Адема:

$$\text{для } a < pb: \qquad P^a P^b = \sum_{j=0}^{[a/p]} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} P^{a+b-j} P^j$$

$$\text{для } a \leq pb: \qquad P^a \beta P^b = \sum_{j=0}^{[a/p]} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} \beta P^{a+b-j} P^j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+j+1} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta P^j$$

$\overline{A}_p$ — подалгебра, порожденная всеми P^i.

Z

Theorem

- *Неразложимые элементы в* A_2 *— это элементы* Sq^k*, где* $k = 2^m$
- *Неразложимые элементы в* A_p *— это элементы* β *и* P^k*, где* $k = p^m$

Definition

Подалгебра S_r $(r \geq 0)$

mod 2: порождена элементами $Sq^{2^0}, Sq^{2^1}, \dots, Sq^{2^r}$
mod p: порождена элементами $P^{p^0}, P^{p^1}, \dots, P^{p^r}$

Определим гомоморфизмы

$$A_2 \xrightarrow{\alpha} A_2/A_2S_{r-2}$$

и

$$A_2/A_2S_{r-2} \xrightarrow{\beta} A_2/A_2S_{r-1}$$

по формулам

$$\alpha(x) = x \cdot Sq^{2^r}$$

$$\beta(x) = x \cdot Sq^{2^r}$$

Легко проверить, что $\beta \circ \alpha = 0$

Toda conjecture. (доказана Уоллом) Последовательность

$$A_2 \xrightarrow{\alpha} A_2/A_2S_{r-2} \xrightarrow{\beta} A_2/A_2S_{r-1}$$

точна.

Definition

(для $p = 2$)

• Моном $Z_k^n = Sq^{2^k} Sq^{2^{k+1}} \dots Sr^{2^n}$ $(n \geq k \geq 0)$

• Z^n - это произведение $Z_{k_1}^n \dots Z_{k_m}^n$, где $k_1 > k_2 > \dots > k_m$.

• Z-моном - это произведение вида $Z^{n_1} \dots Z^{n_s}$, где $n_1 > n_2 > \dots > n_s$.

Theorem (Уолл 1960, Арнон 1994)

Z-мономы и $1 \in A_2$ — базис (векторного пространства) A_2.

Definition

(for $p > 2$)

• Призведение $Z_k^n = P^{p^k} P^{p^{k+1}} \dots P^{p^n}$ $(n \geq k \geq 0)$

• Z^n — произведение вида $(Z_{k_1}^n)^{r_1} \dots (Z_{k_m}^n)^{r_m}$, где $k_1 > k_2 > \dots > k_m$ и $r_j < p$ для всех j.

• Z-моном — это произведение вида $Z^{n_1} \dots Z^{n_s}$, где $n_1 > n_2 > \dots > n_s$.

Theorem (Emelyanov — P.)

• *Множество Z-мономов и 1 — базис (векторного пространства) $\overline{A}_p$.*

• *Множество βZ-мономов и 1 — базис (векторного пространства) A_p .*

Гипотеза Тоды mod p

Для α и β есть несколько возможностей

$$\overline{A}_p \xrightarrow{\alpha} \overline{A}_p/\overline{A}_p S_{r-2} \xrightarrow{\beta} \overline{A}_p/\overline{A}_p S_{r-1}$$

Объяснение:

$p = 2$: $Sq^{2^r} Sq^{2^r} \in A_2 S_{r-1}$

$$Sq^{2^r} Sq^{2^r} = \binom{2^r-1}{2^r} Sq^{2^r+2^r} Sq^0 + \sum_{j=1}^{2^{r-1}} \binom{2^r-j-1}{2^r-2j} Sq^{2^r+2^r-j} Sq^j$$

$p > 2$: $(P^{p^r})^p \in A_p S_{r-1}$.

4 варианта:

- $(P^{p^r})^a (P^{p^r})^b$
- $P^{ap^r} P^{bp^r}$
- $P^{ap^r} (P^{p^r})^b$
- $(P^{p^r})^a P^{bp^r}$

принадлежат $A_p S_{r-1}$ для $a + b = p$ (или даже при $a + b \geq p$)

Зафиксируем a, b: $0 < a < p$, $b = p - a$.
Рассмотрим α_j, β_j, $j = 1, 2$,

$$\alpha_j : A_p \to A_p/A_pS_{r-2}$$

где $\alpha_1(x) = xP^{ap^r}$ и $\alpha_2(x) = x(P^{p^r})^a$, и

$$\beta_j : A_p/A_pS_{r-2} \to A_p/A_pS_{r-1}$$

где $\beta_1(x) = xP^{bp^r}$ и $\beta_2(x) = x(P^{p^r})^b$.
Лемма. Гомоморфизмы β_1 и β_2 корректно определены. Кроме того, $\beta_2 = b!\,\beta_1$. В частности, $\ker\beta_1 = \ker\beta_2$.
Лемма. Для $a + b = p$ и $i, j \in \{1, 2\}$ выполняется равенство $\beta_j \circ \alpha_i = 0$ в последовательности

$$A_p \xrightarrow{\alpha_i} A_p/A_pS_{r-2} \xrightarrow{\beta_j} A_p/A_pS_{r-1}$$

Theorem

Для $p > 2$ и любого $r \geq 2, i, j$ и любого выбора $a + b = p$ последовательность

$$A_p \xrightarrow{\alpha_i} A_p/A_pS_{r-2} \xrightarrow{\beta_j} A_p/A_pS_{r-1}$$

не является точной.

Кроме того, для $r \geq 2$

Theorem

(a) Элемент $2Z^r_{r-1}Z^{r-1}_{r-2} - Z^r_{r-2}Z^{r-1}_{r-1}$ принадлежит β_j, но не принадлежит образу α_i.
(b) Для $\beta(x) = x \cdot P^{(p-1)p^r}$ и $\alpha(x) = x \cdot P^{p^r}$ последовательность Тоды точна в меньших градуировках.
(c) В градуировке $2(p-1)k = 2(p-1)(2p^{r-1} + p^{r-2})$ фактор $\ker \beta/\operatorname{im} \alpha$ одномерен.

X

Definition

• Атомарное произведение $X_k^n = P^{p^n} P^{p^{n-1}} \dots P^{p^k}$ $(n \geq k \geq 0)$
• X^n — произведение вида $(X_{k_1}^n)^{r_1} \dots (X_{k_m}^n)^{r_m}$, где
$k_1 < k_2 < \dots < k_m$ и $r_j < p$ для всех j.
• X-моном — любое произведенение вида $X^{n_1} \dots X^{n_s}$, где
$n_1 < n_2 < \dots < n_s$.
• βX-моном — любое произведение вида
$\beta^{\varepsilon} X_0^{m_1} \cdots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta X$, где X — X-моном или 1, и
$m_r > m_{r-1} > \dots > m_1$, $\varepsilon = 0, 1$.

Definition

- Атомарное произведение $X_k^n = P^{p^n} P^{p^{n-1}} \dots P^{p^k}$ $(n \geq k \geq 0)$
- X^n — произведение вида $(X_{k_1}^n)^{r_1} \dots (X_{k_m}^n)^{r_m}$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ и $r_j < p$ для всех j.
- X-моном — любое произведенение вида $X^{n_1} \dots X^{n_s}$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_s$.
- βX-моном — любое произведенение вида $\beta^\varepsilon X_0^{m_1} \cdots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta X$, где X — X-моном или 1, и $m_r > m_{r-1} > \dots > m_1$, $\varepsilon = 0, 1$.

Theorem (Арнон, 1994)

Множество X-мономов — $\mathbb{Z}/2$-базис (векторного пространства) A_2.

Definition

• Атомарное произведение $X_k^n = P^{p^n} P^{p^{n-1}} \dots P^{p^k}$ $(n \geq k \geq 0)$
• X^n — произведение вида $(X_{k_1}^n)^{r_1} \dots (X_{k_m}^n)^{r_m}$, где
$k_1 < k_2 < \dots < k_m$ и $r_j < p$ для всех j.
• X-моном — любое произведенение вида $X^{n_1} \dots X^{n_s}$, где
$n_1 < n_2 < \dots < n_s$.
• βX-моном — любое произведение вида
$\beta^{\varepsilon} X_0^{m_1} \cdots \beta X_0^{m_{r-1}} \beta X_0^{m_r} \beta X$, где X — X-моном или 1, и
$m_r > m_{r-1} > \dots > m_1$, $\varepsilon = 0, 1$.

Theorem (Арнон, 1994)

Множество X-мономов — $\mathbb{Z}/2$-базис (векторного пространства) A_2.

Theorem (Емельянов — П.)

• *Множество X-мономов — $\mathbb{Z}/p$-базис (векторного пространства) $\overline{A}_p$*
• *Множество βX-мономов — $\mathbb{Z}/p$-базис (векторного пространства) A_p*

Definition

Для топологического пространства V определим его аннигиляторный идеал в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях

$$I_p(V) = \{\theta \in A_p \mid \theta(a) = 0 \text{ для любого } a \in H^*(V, \mathbb{Z}/p)\}$$

Definition

Для топологического пространства V определим его аннигиляторный идеал в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях

$$I_p(V) = \{\theta \in A_p \mid \theta(a) = 0 \text{ для любого } a \in H^*(V, \mathbb{Z}/p)\}$$

Theorem (Giambalvo, Peterson, 1995)

$I_2(K(\mathbb{Z}/2, 2)) = 0.$

Definition

Для топологического пространства V определим его аннигиляторный идеал в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях

$$I_p(V) = \{\theta \in A_p \mid \theta(a) = 0 \text{ для любого } a \in H^*(V, \mathbb{Z}/p)\}$$

Theorem (Giambalvo, Peterson, 1995)

$I_2(K(\mathbb{Z}/2, 2)) = 0.$

Theorem (П.)

$I_p(K(\mathbb{Z}/p, 2), Z/p) = 0.$

Definition

Для топологического пространства V определим его аннигиляторный идеал в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях

$$I_p(V) = \{\theta \in A_p \mid \theta(a) = 0 \text{ для любого } a \in H^*(V, \mathbb{Z}/p)\}$$

Theorem (Giambalvo, Peterson, 1995)

$I_2(K(\mathbb{Z}/2, 2)) = 0.$

Theorem (П.)

$I_p(K(\mathbb{Z}/p, 2), Z/p) = 0.$

Замечание: для проверки тождеств в A_p ($p = 2$ or $p > 2$) можно использовать $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ в качестве тестового пространства. Обычно для проверки тожедества в градуировках $\leq m$ используется произведение $\geq m$ экземпляров $\mathbb{R}P^\infty$ (для $p = 2$) или лизны (для $p > 2$).

Definition

Для топологического пространства V определим его аннигиляторный идеал в $\mathbb{Z}/p$-когомологиях

$$I_p(V) = \{\theta \in A_p \mid \theta(a) = 0 \text{ для любого } a \in H^*(V, \mathbb{Z}/p)\}$$

Theorem (Giambalvo, Peterson, 1995)

$I_2(K(\mathbb{Z}/2, 2)) = 0.$

Theorem (П.)

$I_p(K(\mathbb{Z}/p, 2), Z/p) = 0.$

Замечание: для проверки тождеств в A_p ($p = 2$ or $p > 2$) можно использовать $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ в качестве тестового пространства. Обычно для проверки тожедества в градуировках $\leq m$ используется произведение $\geq m$ экземпляров $\mathbb{R}P^\infty$ (для $p = 2$) или лизны (для $p > 2$).

Giambalvo и Peterson нашли минимальный набор образующих $I_2(K(\mathbb{Z}/2, 1)) \neq 0$.

C

Definition

Последовательность положительных целых чисел $(i_r, i_{r-1}, \dots, i_0)$ (или моном $Sq^I = Sq^{i_r} \dots Sq^{i_0}$) называет *допустимой* iff $i_m \geq 2i_{m-1}$ для всех m. Заметим, что к допустимому моному нельзя применить соотношение Адема.

Definition

Последовательность положительных целых чисел $(i_r, i_{r-1}, \dots, i_0)$ (или моном $Sq^I = Sq^{i_r} \dots Sq^{i_0}$) называет *допустимой* iff $i_m \geq 2i_{m-1}$ для всех m. Заметим, что к допустимому моному нельзя применить соотношение Адема.

Definition

Для допустимой последовательности (и для соответствующего монома) $I = (i_r, i_{r-1}, \dots, i_0)$ положим $\mathrm{ex}(I) = i_r - (i_0 + \ldots + i_{r-1})$.

Definition

Последовательность положительных целых чисел $(i_r, i_{r-1}, \ldots, i_0)$ (или моном $Sq^I = Sq^{i_r} \ldots Sq^{i_0}$) называет *допустимой* iff $i_m \geq 2i_{m-1}$ для всех m. Заметим, что к допустимому моному нельзя применить соотношение Адема.

Definition

Для допустимой последовательности (и для соответствующего монома) $I = (i_r, i_{r-1}, \ldots, i_0)$ положим $\mathrm{ex}(I) = i_r - (i_0 + \ldots + i_{r-1})$.

Theorem

Набор всех допустимых мономов образует базис (векторного пространства) A_2 над $\mathbb{Z}/2$.

Definition

Последовательность положительных целых чисел $(i_r, i_{r-1}, \ldots, i_0)$ (или моном $Sq^I = Sq^{i_r} \ldots Sq^{i_0}$) называет *допустимой* iff $i_m \geq 2i_{m-1}$ для всех m. Заметим, что к допустимому моному нельзя применить соотношение Адема.

Definition

Для допустимой последовательности (и для соответствующего монома) $I = (i_r, i_{r-1}, \ldots, i_0)$ положим $\mathrm{ex}(I) = i_r - (i_0 + \ldots + i_{r-1})$.

Theorem

Набор всех допустимых мономов образует базис (векторного пространства) A_2 над $\mathbb{Z}/2$.

Theorem

Кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/2, n); \mathbb{Z}/2)$ является алгеброй многочленов от образующих вида $Sq^I \iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/2, n); \mathbb{Z}/2)$ — фундаментальный класс и Sq^I — произвольный допустимый моном с $\mathrm{ex}(I) < n$.

Definition

Для последовательности $(i_r, i_{r-1}, \ldots, i_0)$ соответствующий моном Sq^I называется C-мономом iff для всех m

(1) $i_m \leq 2i_{m-1}$

(2) $2^m \mid i_m$ Для пустой последовательной соответствующий моном 1 тоже будем считать C-мономом.

Definition

Для последовательности $(i_r, i_{r-1}, \ldots, i_0)$ соответствующий моном Sq^I называется C-мономом iff для всех m

(1) $i_m \leq 2i_{m-1}$

(2) $2^m \mid i_m$ Для пустой последовательной соответствующий моном 1 тоже будем считать C-мономом.

Theorem (Арнон, 1994)

Набор всех C-мономов образует базис (векторного пространства) A_2.

Definition

Для последовательности $(i_r, i_{r-1}, \dots, i_0)$ соответствующий моном Sq^I называется C-мономом iff для всех m

(1) $i_m \leq 2i_{m-1}$

(2) $2^m \mid i_m$ Для пустой последовательной соответствующий моном 1 тоже будем считать C-мономом.

Theorem (Арнон, 1994)

Набор всех C-мономов образует базис (векторного пространства) A_2.

Theorem (Арнон, 1994)

$H^*(K(\mathbb{Z}/2, n), \mathbb{Z}/2)$ является алгеброй многочленов с образующими $Sq^I \iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/2, n), \mathbb{Z}/2)$ — фундаментальный класс и Sq^I — C-моном с $i_0 < n$ or $Sq^I = 1$.

Definition

Последовательность $(\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \dots i_0, \varepsilon_0)$ и соответствующий моном $\beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{i_r} \beta^{\varepsilon_r} \dots P^{i_0} \beta^{\varepsilon_0}$, где $i_m > 0$ и $\varepsilon_m = 0$ или 1, называются *допустимыми* iff $i_m \geq p i_{m-1} + \varepsilon_m$ для всех m.

Definition

Последовательность $(\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \dots i_0, \varepsilon_0)$ и соответствующий моном $\beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{i_r} \beta^{\varepsilon_r} \dots P^{i_0} \beta^{\varepsilon_0}$, где $i_m > 0$ и $\varepsilon_m = 0$ или 1, называются *допустимыми* iff $i_m \geq p i_{m-1} + \varepsilon_m$ для всех m.

Theorem

Набор допустимых мономов образует $\mathbb{Z}/p$–базис (векторного пространства) A_p.

Definition

Последовательность $(\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \ldots i_0, \varepsilon_0)$ и соответствующий моном $\beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{i_r} \beta^{\varepsilon_r} \ldots P^{i_0} \beta^{\varepsilon_0}$, где $i_m > 0$ и $\varepsilon_m = 0$ или 1, называются *допустимыми* iff $i_m \geq p i_{m-1} + \varepsilon_m$ для всех m.

Theorem

Набор допустимых мономов образует $\mathbb{Z}/p$–базис (векторного пространства) A_p.

Definition

Для допустимого монома $I = (\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, i_{r-1}, \ldots, \varepsilon_1, i_0, \varepsilon_0)$ положим $\mathrm{ex}(I) = 2i_r - (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_r) - 2(p-1)(i_0 + \ldots + i_{r-1})$.

Definition

Последовательность $(\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, \dots i_0, \varepsilon_0)$ и соответствующий моном $\beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{i_r} \beta^{\varepsilon_r} \dots P^{i_0} \beta^{\varepsilon_0}$, где $i_m > 0$ и $\varepsilon_m = 0$ или 1, называются *допустимыми* iff $i_m \geq p i_{m-1} + \varepsilon_m$ для всех m.

Theorem

Набор допустимых мономов образует $\mathbb{Z}/p$–базис (векторного пространства) A_p.

Definition

Для допустимого монома $I = (\varepsilon_{r+1}, i_r, \varepsilon_r, i_{r-1}, \dots, \varepsilon_1, i_0, \varepsilon_0)$ положим $\mathrm{ex}(I) = 2i_r - (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_r) - 2(p-1)(i_0 + \dots + i_{r-1})$.

Theorem

Кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ является свободной кососкоммутативной алгеброй с образующими $P^I \iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс, и P^I произвольный допустимый моном с $\mathrm{ex}(I) < n$.

Definition

βC-мономом назовем элемент $P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{j_r} \beta^{\varepsilon_r} \dots \beta^{\varepsilon_1} P^{j_0} \beta^{\varepsilon_0}$, удовлетворяющий условиям:

(1) $j_k \leq p j_{k-1} + \varepsilon_k$ для всехl k,

(2) p^k делит $j_k - p j_{k-1} - \varepsilon_k$ для всех k.

Условие (2) можно заменить эквивалентным:

(2′) p^k divides $j_k - \sum_{l=0}^{k} p^{k-l} \varepsilon_l$ для всех k.

Definition

βC-мономом назовем элемент $P^J = \beta^{\varepsilon_{r+1}} P^{j_r} \beta^{\varepsilon_r} \dots \beta^{\varepsilon_1} P^{j_0} \beta^{\varepsilon_0}$, удовлетворяющий условиям:

(1) $j_k \leq p j_{k-1} + \varepsilon_k$ для всехl k,

(2) p^k делит $j_k - p j_{k-1} - \varepsilon_k$ для всех k.

Условие (2) можно заменить эквивалентным:

(2′) p^k divides $j_k - \sum_{l=0}^{k} p^{k-l} \varepsilon_l$ для всех k.

Theorem (Емельянов—П.)

Набор всех βC-мономов образует $\mathbb{Z}/p$-базис векторного пространства A_p

Definition

Для последовательности $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, j_{r-1}, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$ положим $e(J) = 2j_0 + (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r - \varepsilon_0)$.

Definition

Для последовательности $J = (\varepsilon_{r+1}, j_r, \varepsilon_r, j_{r-1}, \ldots, \varepsilon_1, j_0, \varepsilon_0)$ положим $e(J) = 2j_0 + (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r - \varepsilon_0)$.

Theorem (Емельянов — П.)

Кольцо когомологий $H^*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ является свободной кососкоммутативной алгеброй от от образующих $P^J\iota_n$, где $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ — фундаментальный класс и P^J — произвольный βC-monomial с $e(J) < n$.

Базис Милнора, умножение и матрицы перехода

В общем случае произведение двух элементов выбранного базиса не является элементов этого базиса (пример для допустимых мономов и $p = 2$: $(Sq^9 Sq^2)(Sq^7 Sq^3)$).

В общем случае произведение двух элементов выбранного базиса не является элементов этого базиса (пример для допустимых мономов и $p = 2$: $(Sq^9 Sq^2)(Sq^7 Sq^3)$).

Базис Милнора.

A_p — биалгебра с кокоммутативным коумножением $\Delta\beta = 1 \otimes \beta + \beta \otimes 1$, $\Delta P^n = \sum\limits_{i+j=n} P^i \otimes P^j$.

В общем случае произведение двух элементов выбранного базиса не является элементов этого базиса (пример для допустимых мономов и $p = 2$: $(Sq^9 Sq^2)(Sq^7 Sq^3)$).

Базис Милнора.

A_p — биалгебра с кокоммутативным коумножением $\Delta\beta = 1 \otimes \beta + \beta \otimes 1$, $\Delta P^n = \sum_{i+j=n} P^i \otimes P^j$.

Двойственная (ко)алгебра A_p^* является биалгеброй с коммутативным умножением.

Пусть ξ_k дуален $P^{p^{k-1}} \dots P^p P^1$,

τ_k — $P^{p^{k-1}} \dots P^p P^1 \beta$

и τ_0 дуален β.

В общем случае произведение двух элементов выбранного базиса не является элементов этого базиса (пример для допустимых мономов и $p = 2$: $(Sq^9 Sq^2)(Sq^7 Sq^3)$).

Базис Милнора.

A_p — биалгебра с кокоммутативным коумножением $\Delta\beta = 1 \otimes \beta + \beta \otimes 1$, $\Delta P^n = \sum\limits_{i+j=n} P^i \otimes P^j$.

Двойственная (ко)алгебра A_p^* является биалгеброй с коммутативным умножением.

Пусть ξ_k дуален $P^{p^{k-1}} \dots P^p P^1$,

τ_k — $P^{p^{k-1}} \dots P^p P^1 \beta$

и τ_0 дуален β.

Theorem (Milnor)

$A_p^* = \mathbb{Z}_p[\xi_1, \xi_2, \dots] \otimes \Lambda(\tau_0, \tau_1, \dots)$

Definition

Для последовательности $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$, где $r_m \geq 0$ и только для конечного их числа $r_m \geq 0$ положим $P(r_1, r_2, \ldots)$ be dual to $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots$,
$Q_0 = \beta$,
$Q_{n+1} = P^{p^n}Q_n - Q_nP^{p^n}$ for $n \geq 0$.

Милноровские элементы: $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots Q_{i_m}P(r_1, r_2, \ldots)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Definition

Для последовательности $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$, где $r_m \geq 0$ и только для конечного их числа $r_m \geq 0$ положим $P(r_1, r_2, \ldots)$ be dual to $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots$,
$Q_0 = \beta$,
$Q_{n+1} = P^{p^n}Q_n - Q_nP^{p^n}$ for $n \geq 0$.

Милноровские элементы: $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots Q_{i_m}P(r_1, r_2, \ldots)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Theorem (Milnor)

Формула для умножения:

- $Q_iQ_j + Q_jQ_i = 0$,

Definition

Для последовательности $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$, где $r_m \geq 0$ и только для конечного их числа $r_m \geq 0$ положим $P(r_1, r_2, \ldots)$ be dual to $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots$,
$Q_0 = \beta$,
$Q_{n+1} = P^{p^n}Q_n - Q_nP^{p^n}$ for $n \geq 0$.

Милноровские элементы: $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots Q_{i_m}P(r_1, r_2, \ldots)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Theorem (Milnor)

Формула для умножения:

- $Q_iQ_j + Q_jQ_i = 0$,
- $P(r_1, r_2, \ldots)Q_k = Q_kP(r_1, r_2, \ldots) + Q_{k+1}P(r_1 - p^k, r_2, \ldots) + Q_{k+2}P(r_1, r_2 - p^k, \ldots) + \ldots$,

Definition

Для последовательности $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$, где $r_m \geq 0$ и только для конечного их числа $r_m \geq 0$ положим $P(r_1, r_2, \ldots)$ be dual to $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots$,
$Q_0 = \beta$,
$Q_{n+1} = P^{p^n}Q_n - Q_nP^{p^n}$ for $n \geq 0$.

Милноровские элементы: $Q_{i_1}Q_{i_2}\ldots Q_{i_m}P(r_1, r_2, \ldots)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Theorem (Milnor)

Формула для умножения:

- $Q_iQ_j + Q_jQ_i = 0$,
- $P(r_1, r_2, \ldots)Q_k = Q_kP(r_1, r_2, \ldots) + Q_{k+1}P(r_1 - p^k, r_2, \ldots) + $
  $+ Q_{k+2}P(r_1, r_2 - p^k, \ldots) + \ldots,$
- $P(R)P(S) = \sum_X c(X)R(T)$, *где сумма берется по матрицам*

$X = (x_{ij})$ *определенного вида,* $c(x) \in \mathbb{Z}/p$ — *произведение некоторых биномиальных коэффициентов и* $t_n = \sum_{i+j=n} x_{ij}$.

Theorem (Monks, 1998)

Для $p = 2$ *матрицы перехода*

$\quad$ *Milnor* $\leftrightarrow$ *admissible,*

$\quad$ *Milnor* $\leftrightarrow$ C*,*

$\quad$ *Milnor* $\leftrightarrow$ X

треугольны,

Theorem (Monks, 1998)

Для $p = 2$ *матрицы перехода*

$\quad$ *Milnor* $\leftrightarrow$ *admissible,*

$\quad$ *Milnor* $\leftrightarrow$ C,

$\quad$ *Milnor* $\leftrightarrow$ X

треугольны,

Milnor $\leftrightarrow$ Z *не является треугольной.*

Theorem (Monks, 1998)

Для $p = 2$ матрицы перехода

Milnor $\leftrightarrow$ admissible,

Milnor $\leftrightarrow$ C,

Milnor $\leftrightarrow$ X

треугольны,

Milnor $\leftrightarrow$ Z не является треугольной.

Theorem (Емельянов, Овчинникова, П.)

Матрицы перехода

Milnor $\leftrightarrow$ admissible,

Milnor $\leftrightarrow$ βC,

Milnor $\leftrightarrow$ βX

треугольны,

Milnor $\leftrightarrow$ βZ не является треугольной.

Thank you!