Спектральный порядок в теории операторных алгебр

Екатерина Турилова

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Декабрьские чтения в Томске, 10.12.2021

- представить "нестандартный" порядок на множестве операторов (и не только), который является достойным конкурентом классическому порядку и имеет интересные физичекие интерпретации;
- показать, насколько естественным является рассмотрение спектрального порядка на семействе самосопряженных (возможно, неограниченных) операторов и на абстрактных AW^*-алгебрах;
- продемонстрировать, что спектральный порядок организует операторную эффект-алгебру в полную решетку, которая естественно содержит решетку ортопроекторов в качестве подрешетки;
- представить интересные результаты по спектральным симметриям, которые можно рассматривать как обобщения известных теорем Вигнера и Дайя о симметриях квантовой системы.

$\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H.
$\mathcal{B}(H)^{sa}$ – множество самосопряженных ограниченных линейных операторов, действующих в H.

Стандартный порядок

для любых $A, B \in \mathcal{B}(H)^{sa}$

$$A \leq B, \text{ если } \langle A\xi, \xi \rangle \leq \langle B\xi, \xi \rangle \qquad \forall \xi \in H.$$

R. Kadison (1951): Если $\dim H > 1$, то $\mathcal{B}(H)^{sa}$ представляет собой антирешетку, то есть точные верхняя и нижняя грани существуют только для сравнимых элементов.

M. P. Olson (1971): "спектральный порядок "на самосопряженной части алгебры фон Неймана, использующий спектральные разложения (разложения единицы) самосопряженных операторов и определяющий структуру условно полной решетки: любое ограниченное сверху непустое подмножество обладает точной верхней гранью.

W. Arveson (1972-1974): однопараметрические группы автоморфизмов на $C^\star$ - алгебре

C. Akemann, N. Weawer (1996): связи между мажорантами спектрального порядка и условным математическим ожиданием на алгебрах фон Неймана

T. Kato, H.F. Groote, T. Ando, A. Planeta

Для $A \in \mathcal{B}(H)^{sa}$ существует единственная система ортопроекторов $\{(E_\lambda(A)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, которая называется спектральным разложением A.

Спектральный порядок, $\leq_S$, определяется на семействе $\mathcal{B}(H)^{sa}$ следующим образом:

$$A \leq_S B, \quad \text{если} \quad E_\lambda(B) \leq E_\lambda(A) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Физическая итерпретация: спектральный ортопроектор $E_\lambda(A)$ предствляет собой вероятность того, что значение наблюдаемой A фиксируется в интервале $(-\infty; \lambda]$. Таким образом, $A \leq_S B$, если для любого состояния системы и для любого вещественного числа λ $E_\lambda(A) \geq E_\lambda(B)$, то есть соответствующие функции распределения по-точечно упорядочены.

Если $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ - алгебра фон Неймана, то для $A \in \mathcal{M}^{sa}$ ортопроекторы $E_\lambda(A) \in \mathcal{M}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Таким образом, спектральный порядок можно определить и на самосопряженной части алгебры фон Неймана.

Если через $\mathcal{E}(H)$ обозначить множество всех положительных самосопряженных линейных операторов (ограниченных или нет), действующих в гильбертовом пространстве H, то спектральный порядок определен и на этом семействе операторов.

Пусть $H = \mathbb{C}^2$. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \leq B, \quad \text{но} \;\; A \not\leq_S B\,,$$

поскольку для $\lambda = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < 1$, являющегося собственным значением B, $E_\lambda(B)$ - ортопроектор на $\mathbb{C}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_\lambda(A)$ - ортопроектор на $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть $E_\lambda(B) \not\leq E_\lambda(A)$.

Спектральный порядок на AW^*-алгебрах

Алгебра фон Неймана может быть определена как C^*-алгебра, имеющая преддвойственную. Другой подход состоит в рассмотрении алгебры фон Неймана как $*$-подалгебры алгебры $\mathcal{B}(H)$ с единицей, совпадающей со своим вторым коммутантом. Существуют и альтернативные топологические определения алгебры фон Неймана. Но, тем не менее, не существует никакой характеристики, относящейся только к внутренним свойствам алгебры (без использования структуры двойственности или представления гильбертова пространства). Это побудило Капланского определить алгебраическое обобщение алгебр фон Неймана, называемое AW^*-алгебрами.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{p \in \mathcal{A} \mid P = P^2 = P^*\}$ - множество ортопроекторов C^*-алгебры $\mathcal{A}$, снабженное стандартным порядком:

$$P \leq Q, \quad \text{если} \quad P = PQ = QP\,.$$

Ортогональность:

$$P \perp Q, \quad \text{если} \quad PQ = 0\,.$$

Определение

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *AW^*-алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1. Каждая максимальная абелевская C^*-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ порождается ортопроекторами.
2. Каждое непустое подмножество в $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из попарно ортогональных ортопроекторов обладает точной верхней гранью.

Если $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра, то справедливы следующие свойства:

- $\mathcal{A}$ содержит единицу, и $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ - полная ортомодулярная решетка.
- Каждая максимальная абелевская C^*-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$ является AW^*-алгеброй.

• Каждая алгебра фон Неймана есть AW^*-алгебра, обратное утверждение неверно даже в случае абелевских алгебр.

• $\mathcal{A}$ - абелевская AW^*-алгебра тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре $C(X)$ непрерывных функций на компактном хаусдорфовом стоуновском пространстве X.

Исследования AW^*-алгебр с точки зрения теории булевых алгебр вызваны следующим соответствием:

Отображение

$$\mathcal{A} \to (\mathcal{P}(\mathcal{A}), \leq, 0, 1, \perp)$$

представляет собой биекцию между абелевскими AW^*-алгебрами и полными булевыми алгебрами.

Подобное утверждение не является верным для алгебр фон Неймана, поскольку существует полные булевы алгебры, не изоморфные решетке ортопроекторов ни для какой алгебры фон Неймана.

Пусть A - положительный элемент в $\mathcal{A}$, P - ортопроектор в $\mathcal{A}$, который коммутирует с A и обладает следующим свойством: если $B \geq 0$ и $AB = 0$, то $PB = 0$.
Существует только один ортопроектор с таким свойством, который называется ранговым и обозначается как $r(A)$.

Для каждого $\lambda \geq 0$ можно рассмотреть ортопроектор

$$E_\lambda(A) = 1 - r((A - \lambda r(A))^+).$$

Таким образом, для любого положительного элемента A из AW^*-алгебры $\mathcal{A}$ существует спектральное разложение

$$\{E_\lambda(A)\}_{\lambda \geq 0} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}).$$

Спектральное разложение на положительной части единичного шара обладает следующими свойствами:

1. Монотонность: $\lambda \leq \mu \Longrightarrow E_\lambda(A) \leq E_\mu(A)$.
2. Непрерывность справа: $E_\lambda(E) = \inf_{\mu > \lambda} E_\mu(A)$.
3. Ограниченность: $E_\lambda(A) = 0$, если $\lambda < 0$; $E_\lambda(A) = 1$, если $\lambda > 1$.
4. $AE_\lambda(A) = E_\lambda(A)A \leq \lambda\, E_\lambda(A), \quad A(1 - E_\lambda(A)) \geq \lambda\, E_\lambda(A)\,.$

Это позволяет нам определить спектральный порядок на положительных элементах единичного шара AW^*-алгебры $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$A \leq_S B, \quad \text{если} \quad E_\lambda(B) \leq E_\lambda(A) \qquad \forall \lambda \geq 0\,.$$

Примеры

- $f, g \in C_{\mathbb{R}}(X)$, где X стоуновское пространство. Тогда

$$f \leq_S g \iff f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X\,.$$

- If $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ then

$$P \leq_S Q \iff P \leq Q\,.$$

Будем рассматривать спектральный порядок на положительной части единичного шара.
Эта структура известна как операторная эффект-алгебра или алгебра эффектов. Мы будем использовать следующее обозначение:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \,|\, 0 \leq A \leq 1\}\,.$$

Предложение

Пусть $A, B \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$. Тогда

- $A \leq_S B$ влечет $A \leq B$.
- Если A и B коммутируют и $A \leq B$, то $A \leq_S B$. (Отношения порядка $\leq$ и $\leq_S$ совпадают на абелевской части.)

Более того, $A \leq_S B$ не означает, что A и B коммутируют, что демонстрирует следующее предложение:

Предложение

Для AW^*-алгебры $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{A}$ абелевская.
2. $A \leq_S B$ влечет $AB = BA$ для любых $A, B \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$.
3. $\leq$ и $\leq_S$ совпадают на $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Замечательное свойство спектрального порядка состоит в том, что это отношение задает на множестве $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ структуру полной решетки:

Пусть $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра. Тогда $(\mathcal{E}(\mathcal{A}), \leq_S)$ представляет собой *полную решетку. Операции, определяющие структуру решетки, задаются следующим образом:*

$$A \vee_S B \; .... \; \text{спектральное разложение: } \lambda \to E_\lambda(A) \wedge E_\lambda(B) \, .$$

$$A \wedge_S B \; .... \; \text{спектральное разложение: } \lambda \to \inf_{\mu > \lambda} (E_\mu(A) \vee E_\mu(B)) \, .$$

Формула для точной нижней грани может быть упрощена в случае конечной AW^*-алгебры.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ - конечная AW^*-алгебра. Тогда для любых $A, B \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E_\lambda^{A \vee_S B} = E_\lambda^A \wedge E_\lambda^B, \qquad E_\lambda^{A \wedge_S B} = E_\lambda^A \vee E_\lambda^B.$$

Предложение

Если $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра, то $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \leq)$ - подрешетка в $(\mathcal{E}(\mathcal{A}), \leq_S)$.

Другими словами, решетка ортопроекторов $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \leq)$ естественно встраивается в спектральную решетку $(\mathcal{E}(\mathcal{A}), \leq_S)$. Именно поэтому спектральный порядок целесообразно использовать для изучения структуры алгебры эффектов.

Спектральный центр

Центр решетки обычно определяется как множество элементов, удовлетворяющих закону дистрибутивности с любой выбранной парой элементов.

Определение

Элемент $Z \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ называется центральным, если для любых $X, Y \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ имеем:

$$Z \wedge_S (X \vee_S Y) = (Z \wedge_S X) \vee_S (Z \wedge_S Y)\,.$$

Множество всех центральных элементов называется спектральным центром и обознаается $\mathcal{Z}(\mathcal{E}(\mathcal{A}))$.

Спектральный центр содержит все центральные элементы алгебры.

Центр алгебры: $Z(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \mid AB = BA$ для любых $B \in \mathcal{A}\}$.
Существует следующая характеризация центральных ортопроекторов в терминах закона дистрибутивности для решетки ортопроекторов:

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра. Ортопроектор $Z \in \mathcal{A}$ является центральным тогда и только тогда, когда для любого $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$

$$Z = (Z \vee P) \wedge (Z \vee (1 - P)).$$

Для конечной AW^*-алгебры мы можем охарактеризовать центр алгебры в терминах сректрального порядка.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ - конечная AW^*-алгебра. Тогда

$$\mathcal{Z}(\mathcal{E}(\mathcal{A})) = Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{A}).$$

Сохранение спектрального порядка: алгебра фон Неймана

$\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана
$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ - множество ортопроекторов алгебры $\mathcal{M}$
$\mathcal{E}(\mathcal{M})$ - алгебра эффектов алгебры $\mathcal{M}$

Спектральный порядковый автоморфизм - биекция $\varphi : \mathcal{E}(\mathcal{M}) \to \mathcal{E}(\mathcal{M})$, сохраняющая спектральный порядок в двух направлениях:

$$A \leq_S B \Longleftrightarrow \varphi(A) \leq_S \varphi(B)\,.$$

Проекторный порядковый автоморфизм - биекция $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$, сохраняющая стандартный (спектральный) порядок в двух направлениях:

$$P \leq Q \Longleftrightarrow \varphi(P) \leq \varphi(Q)\,.$$

На $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ отношение ортогональности:

$$A \perp B, \ \text{если} \ AB = 0\,.$$

Спектральный ортоморфизм - это спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, сохраняющий ортогональность в двух направлениях:

$$A \perp B \Longleftrightarrow \varphi(A) \perp \varphi(B)\,.$$

Проекторный ортоморфизм - это проекторный порядковый автоморфизм φ, сохраняющий ортогональность в двух направлениях:

$$P \perp Q \Longleftrightarrow \varphi(P) \perp \varphi(Q)\,.$$

Примеры:

- $A \to f(A)$, где $f : [0,1] \to [0,1]$ - строго возрастающая биекция
- Пусть τ - проекторный порядковый автоморфизм на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Преобразование φ_τ, которое каждому оператору A ставит в соответствие оператор со спектральным разложением $(\tau(E_\lambda))_\lambda$.

Спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ канонический, если

$$\varphi(A) = \varphi_\tau(f(A)), \quad A \in \mathcal{E}(\mathcal{M}).$$

Не каждый спектральный порядковый автоморфизм канонический (канонический сохраняет операторы, кратные 1.)

L.Molnár, P.Šemrl, 2007

Пусть H - бесконечномерное гильбертово пространство и $\varphi : \mathcal{E}(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{E}(\mathcal{B}(H))$ - спектральный порядковый автоморфизм. Тогда существует обратимый положительный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$, строго возрастающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ и унитарный или антиунитарный оператор U, действующий в H, такие что

$$\varphi(A) = U(\lim_n (Tf(A)^n T)^{1/n})U^* \text{ для любого } A \in \mathcal{E}(\mathcal{B}(H)).$$

В частности, φ канонический

Теорема *L.Molnár*, *P.Šemrl* не справедлива для алгебр фон Неймана в общем случае, но остается справедливой при выполнении дополнительного условия.

Пусть $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Определим

$$[P] = \{\lambda P \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

Будем говорить, что спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ сохраняет операторы, кратные ортопроекторам, если для любого $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, такой что

$$\varphi([P]) \subseteq [Q].$$

Теорема

Спектральный порядковый автоморфизм $\varphi : \mathcal{E}(\mathcal{M}) \to \mathcal{E}(\mathcal{M})$ является каноническим тогда и только тогда, когда сохраняет операторы, кратные ортопроекторам.

Вопрос: Можно ли ослабить условие сохранения операторов, кратных ортопроекторам?

Будем говорить, что спектральный порядковый автоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ сохраняет операторы, кратные **1**, если

$$\varphi([\mathbf{1}]) \subseteq [\mathbf{1}]\,.$$

Теорема

Спектральный ортоморфизм φ на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ сохраняет операторы, кратные $\mathbf{1}$, тогда и только тогда, когда существует проекторный ортоморфизм τ на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ и строго возрастающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что

$$\varphi(A) = \varphi_\tau(f(A)) \qquad A \in \mathcal{E}(\mathcal{M}))\,.$$

Известная теорема (Dye) гласит, что ортоморфизм на решетке ортопроекторов алгебры фон Неймана, не содержащей прямых слагаемых типа I_2, порождается Йордановым $*$-изоморфизмом.

Мы можем использовать этот результат для характеристики спектральных ортоморфизмов:

Линейная биекция $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ называется Йордановым $*$-изоморфизмом, если

$$J(A^*) = J(A)^*, \quad J(A^2) = J(A)^2$$

для любых $A \in \mathcal{M}$.

Теорема

Пусть $\mathcal{M}$ - алгебра фон Неймана, не содержащая прямых слагаемых типа I_2, φ - спектральный ортоморфизм на $\mathcal{E}(\mathcal{M})$, сохраняющий операторы, кратные $\mathbf{1}$. Тогда существует Йорданов $*$-изоморфизм J и строго возрастающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$, такие что

$$\varphi(A) = J(f(A)) \qquad A \in \mathcal{E}(\mathcal{M}))\,.$$

Сохранение спектрального порядка: $AW^\star$ -алгебра

$\mathcal{A}$ - $AW^\star$ - алгебра.
Решетка ортопроекторов $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \perp)$ -ортомодулярная решетка с отношением ортогональности:

$$P \perp Q, \text{если } PQ = 0\,.$$

Спектральная решетка $(\mathcal{E}(\mathcal{A}), \leq_{\mathcal{S}}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \perp)$ с отношением ортогональности:

$$A \perp B, \text{ если } AB = 0\,.$$

Решетка ортопроекторов - подрешетка спектральной решетки.

Симметрии решеки ортопроекторов описаны.

Определения

1. Биекция $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$, сохраняющая ортогональность в двух направлениях,
$$\varphi(P) \perp \varphi(Q) \Longleftrightarrow P \perp Q\,,$$
для любых $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, называется ортоморфизмом.
2. Линейная биекция $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между двумя $C^\star$-алгебрами называется Йордановым $*$-изоморфизмом, если $J(A^2) = J(A)^2$ и $J(A^*) = J(A)^*$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

• Любой ортоморфизм - изоморфизм ортомодулярной решетки.

• Ограничение любой Йорданова $*$-изоморфизма - ортоморфизм между решетками ортопроекторов.

Следующая теорема (J. Hamhalter) полностью характеризует ортоморфизмфы на решетке ортопроекторов для AW^*-алгебр.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра, не содержащая прямых слагаемых типа I_2 и $\mathcal{B}$ - AW^*-алгебра. Тогда для любого ортоморфизма

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{B}),$$

существует единственный Йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ такой, что

$$\varphi(P) = J(P)$$

для любого $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра. Биекция $\varphi : \mathcal{E}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}(\mathcal{A})$ называется **спектральным порядковым автоморфизмом**, если φ сохраняет спектральный порядок и ортогональ ность в двух направлениях:

$$A \leq_S B \Longleftrightarrow \varphi(A) \leq_S \varphi(B)$$

$$A \perp B \Longleftrightarrow \varphi(A) \perp \varphi(B)\,,$$

для любых $A, B \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$.

В отличии от решетки ортопроекторов, не все спектральные порядковые автоморфизмы являются ограничениями Йордановых $*$-изоморфизмов, поскольку они могут быть и нелинейны. Также спектральный автоморфизм не ограничивается до ортоморфизма решетки ортопроекторов.

Примеры спектральных порядковых автоморфизмов:

- Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ строго возрастающая биекция. Тогда
$$A \to f(A)$$
спектральный порядковый автоморфирм. (Нелинейный, сохраняющий ортопроекторы,...)
- Пусть $J : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Йорданов $*$-изоморфизм. Тогда ограничение J на $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ - спектральный порядковый автоморфизм.
- Отображение $\varphi : \mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H) \oplus \mathcal{B}(H)$, определяемое формулой
$$x \oplus y \to x^2 \oplus y \qquad x, y \in B(H)\,,$$
ограничивается до спектрального порядкового автоморфизма (не сохраняет операторы, кратные $\mathbf{1}$).

Спектральный порядковый автоморфизм φ сохраняет операторы, кратные $\mathbf{1}$, если для любого $\lambda \in [0,1]$ существует единственное $\mu \in [0,1]$ такое, что

$$\varphi(\lambda \mathbf{1}) = \mu \mathbf{1}.$$

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ - AW^*-алгебра, не содержащая прямых слагаемых типа I_2 . Пусть φ - спектральный порядковый автоморфизм, сохраняющий операторы, кратные $\mathbf{1}$. Тогда существует единственный Йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ и единственная строго возрастающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что

$$\varphi(A) = J(f(A)) \qquad \text{для любых } A \in \mathcal{E}(\mathcal{A}).$$

AW^*-алгебра называется фактором, если ее центр состоит из операторов, кратных $\mathbf{1}$. Наш результат о структуре спектрального центра гласит, что спектральный порядковый автоморфизм должен сохранять центр конечной алгебры. В частности, в случае факторов он должен автоматически сохранять операторы, кратные $\mathbf{1}$:

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ - конечная AW^*-алгебра, являющаяся фактором. Пусть φ - спектральный порядковый автоморфизм на $\mathcal{E}(\mathcal{A})$. Тогда существует единственный Йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ и единственная строго возрастающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что

$$\varphi(A) = J(f(A)) \qquad \text{для любых } A \in \mathcal{E}(\mathcal{A})\,.$$

Эти условия справедливы, например, для алгебры матриц $M_n(\mathbb{C})$, конечной алгебры фон Неймана, являющейся фактором и т.д.

Еще одно направление исследований связано с изучением спектральных порядковых автоморфизмов в общем случае положительных самосопряженных (возможно неограниченных) операторов, действующих в гильбертовом пространстве H.

$\mathcal{E}(H)$ .... множество положительных самосопряженных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H.

$\mathcal{P}(H)$ ... множество ортопроекторов, действующих в H.

Предложение

Пусть $\tau : \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ проекторный порядковый авморфизм. Определим $\varphi_\tau : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(H)$ так, что для каждого $A \in \mathcal{E}(H)$ спектральное разложение определяется семейством

$$E_\lambda^{\varphi_\tau(A)} = \tau(E_\lambda^A), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда φ_τ - спектральный порядковый автоморфизм.

Теорема

Пусть $\varphi : \mathcal{E}(H) \to \mathcal{E}(H)$ - биекция, сохраняющая спектральный порядок в двух направлениях. Тогда существует константа $c > 0$, спектральный проекторный автоморфизм τ на $\mathcal{P}(H)$ и строго возрастающая биекция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такие, что

$$\varphi(A) = c\varphi_\tau(f(A)), \qquad A \in \mathcal{E}(H)\,.$$

JB^*-тройка - это комплексное банахово пространство E, снабженное непрерывным отображением

$$\{\cdot,\cdot,\cdot\} : E^3 \to E \text{ (тройное произведение)},$$

которое симметрично и билинейно по крайним переменным, сопряженно линейно по средней переменной и, кроме того, обладает следующими свойствами:

1. (Тождество Йордана) Для $x, y, a, b, c \in E$

   $$\{x,y,\{a,b,c\}\} = \{\{x,y,a\},b,c\} - \{a,\{y,x,b\},c\} + \{a,b,\{x,y,c\}\}$$

2. Для $a, b \in E$ отображение $L(a,b) : x \to \{a,b,x\}$ представляет собой эрмитов оператор с неотрицательным спектром;
3. $\|\{x,x,x\}\| = \|x\|^3$.

Любая C^*-алгебра становится JB^*-тройкой, если на этой алгебре задано тройное произведение

$$\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a)\,.$$

В более общем смысле JB^*-алгебра может рассматриваться как система троек, если снабдить ее произведением

$$\{a, b, c\} = (a \circ b^*) \circ c + a \circ (b^* \circ c) - (a \circ c) \circ b^*\,.$$

JBW^*-тройка - это JB^* тройка, имеющая преддвойственную. В этом случае мы имеем дело с обобщением алгебр фон Неймана.

Трипотент $u \in E$: $u = \{u, u, u\}$. $U(E)$ множество всех трипотентов.
Для каждого $u \in U(E)$ определим подпространство:

$$E_2(u) = \{x \in E \,|\, \{u, u, x\} = x\}\,.$$

Если E - JBW^*-тройка, то $E_2(u)$ представляет собой JBW^*"подтройку"E, организуемую в JBW^*-алгебру, если определить йорданово произведение и $*$-операцию следующим образом:

$$a \circ b = \{a, u, b\}\,, \qquad a^* = \{u, a, u\}\,.$$

В этом случае u представляет собой единицу алгебры.
Если e является трипотентом в JBW^* тройке E, то $E_2(e)$ есть JBW^* алгебра.

Отношение порядка на трипотентах

Пусть e и f - трипотенты в JB^*-тройке E. Будем говорить, что $e \leq f$, если

$$e = \{e, f, e\}.$$

Частично упорядоченное множество трипотентов $U(E)$ в общем случае решеткой не является.

Если E - JB^*-алгебра, $p, q \in E$ - трипотенты и проекторы, то $p \leq q$ как проекторы тогда и только тогда, когда $p \leq q$ как трипотенты.

Ранговый трипотент

E - JBW^*-тройка E, $x \in E$ элемент единичной нормы. Существует трипотент $r(x)$ в E, такой что x - положительный элемент в $E_2(r(x))$, и $r(x)$ - наименьший из возможных трипотентов с таким свойством.

Если x - произвольный ненулевой элемент, то мы определим для него ранговый трипотент как $r(x/\|x\|)$, используя при этом прежнее обозначение $r(x)$, $r(0) = 0$.

Если существует другой трипотент $u \geq r(x)$, для которого x остается положительным в JBW^*-алгебре $E_2(u)$, то $r(x)$ становится ранговым проектором элемента x в этой алгебре.

Определение

Пусть x, y - элементы JBW^*-тройки E. Будем говорить, что x не превосходит y в смысле спектрального порядка на E (пишем $x \leq_S y$), если справедливо следующее:

$$r([x - \lambda r(x)]^+) \leq r([y - \lambda r(y)]^+) \qquad \text{для любого } \lambda \geq 0\,.$$

Для трипотента $e \in E$ и $\lambda \geq 0$ мы имеем

$$[e - \lambda r(e)]^+ = [(1-\lambda)e]^+ = e$$

для $\lambda < 1$ и 0 - для других λ.
Спектральный порядок на E является расширением порядка на трипотентах: для трипотентов e и f из E $e \leq f$ тогда и только тогда, когда $e \leq_S f$.

$(E, \leq_S)$ в общем случае не является решеткой: рассмотрим два различных максимальных элемента $u, w \in U(E)$ и предположим, что $x \geq_S u, w$. Тогда, положив в определении спектрального порядка $\lambda = 0$, мы имеем $u, w \leq r(x)$, что невозможно.

J. Hamhalter

Если x и y - положительные элементы из JBW-алгебры, то $x \leq_S y$ тогда и только тогда, когда $x^n \leq y^n$ для любого натурального n.

M.P.Olson

Пусть A и B - ограниченные положительные самосопряженные операторы, дейсвующие в гильбертовом пространстве H. Тогда $A \leq_S B$ тогда и только тогда, когда $A^n \leq B^n$ для любого натурального n.

Эти утверждения можно рассматривать как характеризацию спектрального порядка в терминах импульсов.

В случае JBW^*-троек мы не имеем никакого глобального "стандартного"порядка.

Для получения аналога результата Олсона мы должны ограничиться локальными частями JBW^*-троек, на которых стандартный порядок натуральным образом задается структурой JBW-алгебры. С другой стороны, нам не нужно предполагать, что мы имеем дело с положительными элементами.

Теорема

Пусть x и y - элементы из JB^*-тройки E. Предположим, что существует трипотент w в E, такой что $r(x), r(y) \leq w$. Тогда $x \leq_S y$ тогда и только тогда, когда $x^n \leq y^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. (Степени и порядок $\leq$ задаются подалгеброй $E_2(w)$.)

Спасибо за внимание!