# Гамильтонов формализм и устойчивость динамики с высшими производными

Д.С. Капарулин

Доклад основан на цикле совместных работ с
С.Л. Ляховичем, А.А. Шараповым, И.Ю. Каратаевой и В.А. Абакумовой

Томский государственный университет

10.12.2021

# История вопроса

1761 Вариационный принцип

1850 Формализм Остроградского

1918 Вейлевская гравитация

1926 Квантовая механика

1942 Обобщенная электродинамика Подольского

1950 Осциллятор Пайса-Уленбека

1982 Инфляция Старобинского

Современность:
физика высоких энергий, модели с диссипацией, спиновые частицы

# Модели с высшими производными

Пусть $q_a, a = 1, \ldots, n$ – обобщенные координаты. Моделями с высшими производными называется класс теорий в котором функция Лагранжа включает вторые и более высокие производные обобщенных координат:

$$S[q(t)] = \int L(t,\, q,\, \dot{q},\, \ddot{q},\, \ldots,\, q^{(m)})dt\,, \qquad m \geq 2\,. \tag{1}$$

Принцип наименьшего действия для функционала (1) приводит к следующим уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta q_a} \equiv \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial L}{\partial {q^{(k)}}_a} = 0. \tag{2}$$

Уравнения могут быть разрешены относительно производных порядка $2m$, если матрица Гесса невырождена:

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial {q^{(m)}}_a \partial {q^{(m)}}_b} \neq 0\,. \tag{3}$$

# Энергия

## Закон сохранения энергии.

*Пусть функция Лагранжа не зависит от времени явно. Тогда энергия системы $E$ является интегралом движения:*

$$E = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r}^{m} {q_a}^{(r)} (-1)^{s-r} \frac{d^{s-r}}{dt^{s-r}} \frac{\partial L}{\partial {q_a}^{(s)}} - L\,; \tag{4}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{q}_a \frac{\delta S}{\delta q_a}. \tag{5}$$

Закон сохранения энергии в механике (в различных формулировках) рассматривался с XVII века (Декарт, Лейбниц, Эйлер, Якоби). Однако, происхождение закона сохранения энергии было объяснено на основании теоремы о связи симметрий и законов сохранения, сформулированной Нетер в 1918 г.

Если $m > 1$, то энергия вовлекает производные обобщенных координат ${q_a}^{(2m-1)}$ порядка $2m-1$ линейным образом. Если ${q_a}^{(2m-1)}$ – независимые начальные данные, то энергия никогда не ограничена снизу.

# Фазовое пространство

Остроградский в 1850 предложил ввести следующий набор обобщенных координат (в фазовом пространстве) и обобщенных импульсов:

$$q^1{}_a = q_a, \qquad q^r{}_a = \dot{q}^{(r-1)}{}_a, \qquad r = 2, \ldots, m\,; \tag{6}$$

$$p^r{}_a = \sum_{s=r}^{m} (-1)^{s-r} \frac{d^{s-r}}{dt^{s-r}} \frac{\partial L}{\partial q^{(s)}{}_a}\,. \tag{7}$$

Каноническая скобка Пуассона:

$$\{q^r{}_a, q^s{}_b\} = \{p^r{}_a, p^s{}_b\} = 0, \qquad \{q^r{}_a, p^s{}_b\} = \delta^{rs}\delta_{ab}\,. \tag{8}$$

## Пример 1.

*Пусть* $m = 2$. *Тогда*

$$q^1{}_a = q_a, \qquad q^2{}_a = q_a, \qquad p^2{}_a = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_a}\,, \qquad p^1{}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_a}\,. \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \{q^r{}_a, q^s{}_b\} = \{p^r{}_a, p^s{}_b\} = \{q^1{}_a, p^2{}_b\} = \{q^2{}_a, p^1{}_b\} = 0, \\ \{q^1{}_a, p^1{}_b\} = \{q^2{}_a, p^2{}_b\} = \delta_{ab}\,. \end{gathered} \tag{10}$$

# Действие & уравнения движения первого порядка

Функционал действия:

$$S_H[q(t), p(t)] = \int \left\{ \sum_{r=1}^{m} p^r{}_a \dot{q}^r{}_a - H \right\} dt\,. \tag{11}$$

Функция Гамильтона:

$$H = \sum_{r=1}^{m-1} p^r{}_a q^{r+1}{}_a + p^m{}_a q^{(m)}{}_a(t,q,p) - L(t,\, q^1,\, q^2,\, \ldots,\, q^m, q^{(m)}(t,q,p))\,. \tag{12}$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}^r{}_a = \{q^r{}_a, H\}\,, \quad \dot{p}^r{}_a = \{p^r{}_a, H\}, \quad a = 1, \ldots, n, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Формализм Остроградского применим к моделям с невырожденной матрицей Гесса. В 1983 г. Гитман, Ляховчич и Тютин построили его обобщение на случай вырожденных теорий. Там же было показано, что любой другой способ введения обобщенных координат в фазовом пространстве приводит к канонически эквивалентной гамильтоновой формулировке.

# Неустойчивость Остроградского

## Утверждние 1. (Теорема Остроградского).

*Функция Гамильтона линейна по обобщенным импульсам* $p^1, .., p^{m-1}$,

$$H = \sum_{r=1}^{m-1} {p^r}_a {q^{r+1}}_a + {p^m}_a {q^{(m)}}_a(t,q,p) - L(t,\, q^1,\, q^2,\, \ldots,\, q^m, q^{(m)}(t,q,p))\,. \quad (14)$$

*Следовательно, она не ограничена снизу при* $m > 1$.

Так функция Гамильтона совпадает с энергией системы, записанной в терминах обобщенных координат и обобщенных импульсов, то теорема Остроградского гарантирует, что энергия неособенной теории всегда не ограничена снизу.

В отличие от других видов неустойчивости, неустойчивость Остроградского имеет нединамическое происхождение. Она является артефактом алгоритма построения гамильтоновой формулировки и применения процедуры канонического квантования.

# Квантовая теория

## Правила соответствия

*В квантовой теории физические величины заменяются операторами. В координатном представлении правила сопоставления записываются так:*

$$O(p,q) \to \widehat{O} = O(\widehat{p},\widehat{q}) \tag{15}$$

$$q^r{}_a \to \widehat{q}^r{}_a = q^r{}_a \cdot \,, \qquad p^r{}_a \to \widehat{p}^r{}_a = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^r{}_a} \,. \tag{16}$$

*Значения физической величины $O$ даются собственными значениями оператора $\widehat{O}$, действующего в гильбертовом пространстве.*

Если функция Гамильтона не ограничена снизу, то (при некоторых разумных предположениях) соответствующий ей оператор Гамильтона имеет не ограниченный спектр значений. В квантовой теории с неустойчивостью Остроградского связывают следующие утверждения.

- Отсутствует вакуумное состояние с наименьшей энергией.
- Спектр энергий не ограничен снизу.

# Направления исследований

В литературе рассматриваются три следующих направления решения проблемы неустойчивости Остроградского.

- Использование сингулярных теорий.
- Применение альтернативных схем квантования.
- Модификация взаимосвязи м/у симметриями и законами сохранения.

Предметом настоящего доклада являются п.2 и п.3.

# АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

# Осциллятор Пайса-Уленбека

Одномерным осциллятором П.-У. называется динамическая система с одной динамической переменной $x(t)$, описываемая функцией Лагранжа

$$S[x(t)] = \frac{1}{2({\omega_2}^2 - {\omega_1}^2)} \int x \left( \frac{d^4}{dt^4} + ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) \frac{d^2}{dt^2} + {\omega_1}^2 {\omega_2}^2 \right) x dt \,. \tag{17}$$

Здесь $\omega_1$ и $\omega_2$ – частоты колебаний, которые считаются различными положительными вещественными числами. Уравнения Эйлера-Лагранжа записываются так:

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{1}{{\omega_2}^2 - {\omega_1}^2} \left( \frac{d^4}{dt^4} + ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) \frac{d^2}{dt^2} + {\omega_1}^2 {\omega_2}^2 \right) x = 0 \,. \tag{18}$$

Решением уравнения движения является бигармоническое колебание:

$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \,, \tag{19}$$

где $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ - константы интегрирования.

Динамика теории не является неустойчивой, но имеет место неустойчивость Остроградского из-за наличия высших производных в функции Лагранжа.

# Симметрии и законы сохранения

В бигармоническом колебании энергия каждого колебания является интегралом движения. Поэтому, в теории осциллятора П.-У. имеется двухпараметрическое семейство интегралов движения:

$$
\begin{aligned}
J(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{2}\left\{\left(\frac{\dddot{x}+{\omega_2}^2\dot{x}}{{\omega_1}^2-{\omega_2}^2}\right)^2 + {\omega_1}^2\left(\frac{\ddot{x}+{\omega_2}^2 x}{{\omega_1}^2-{\omega_2}^2}\right)^2\right\}+ \\
+\frac{\beta}{2}\left\{\left(\frac{\dddot{x}+{\omega_1}^2\dot{x}}{{\omega_2}^2-{\omega_1}^2}\right)^2 + {\omega_2}^2\left(\frac{\ddot{x}+{\omega_1}^2 x}{{\omega_2}^2-{\omega_1}^2}\right)^2\right\}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Вещественные числа $\alpha,\beta$ – параметры закона сохранения.

На решении (19) интеграл $J(\alpha,\beta)$ имеет следующее значение:

$$
J(\alpha,\beta)\Big|_{x=x(t)} = \frac{\alpha{\omega_1}^2 A^2}{2} + \frac{\beta{\omega_2}^2 B^2}{2}\,. \tag{21}
$$

Эта величина ограничена снизу, если $\alpha,\beta>0$.

Каноническая энергия не ограничена:

$$
E = J(-1,+1)\,. \tag{22}
$$

# Гамильтонов формализм

В 2005 г. Болонек и Косиньский построили альтернативную гамильтонову формулировку для осциллятора П.-У., в которой в качестве функции Гамильтона взят произвольный невырожденный интеграл движения $J(\alpha, \beta)$:

$$H_{\alpha,\beta} = J(\alpha, \beta)\,. \tag{23}$$

Была найдена следующая скобка Пуассона:

$$\{\ddot{x},\, \dddot{x}\}_{\alpha,\beta} = \frac{{\omega_1}^4}{\alpha} + \frac{{\omega_2}^4}{\beta}\,, \qquad \{x,\, \dddot{x}\}_{\alpha,\beta} = \{\ddot{x}, \dot{x}\}_{\alpha,\beta} = \frac{\omega_1^2}{\alpha} + \frac{\omega_2^2}{\beta}\,; \tag{24}$$

$$\{x, \dot{x}\}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\,, \qquad \{x, \dot{x}\}_{\alpha,\beta} = \{\dot{x},\, \dddot{x}\}_{\alpha,\beta} = 0\,. \tag{25}$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{z}_i = \{z_i, H_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}\,, \qquad z_i = \{x, \dot{x}, \ddot{x},\, \dddot{x}\}\,. \tag{26}$$

Формулировка Остроградского соответствует выбору $\beta = -\alpha = 1$. Альтернативный гамильтонов формализм в модели осциллятора П.-У. произвольного конечного порядка построен Дамаскинским и Соколовым в 2006 г.

# Расширенная теория Черна-Саймонса

Пусть $x^\mu, \mu = 0, 1, 2$ – координаты на трехмерном пространстве Минковского $d$ – дифференциал де-Рама, $*$ – оператор Ходжа. Сингатура метрики Минковского считается в основном отрицательной:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1)\,. \tag{27}$$

Расширенная теория Ч.-С. есть модель векторного поля $A = A_\mu(x)dx^\mu$ с функционалом действия

$$S[A(x)] = \frac{1}{2}\int \sum_{r=1}^{n} m^{2-r}\alpha_r * A \wedge (*d)^r A\,. \tag{28}$$

Здесь $m$ - константа с размерностью массы, $\alpha_r, r = 1, \dots, n$ - вещественные числа. Мы предполагаем $\alpha_n > 0$.

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta A} = \sum_{r=1}^{n} m^{2-r}\alpha_r F^r = 0\,, \qquad F^r = m^{-r}(*d)^r A. \tag{29}$$

# Сохраняющиеся тензоры

Расширенная теория Ч.-С. порядка $n$ допускает $n$-параметрическое семейство сохраняющихся тензоров второго ранга:

$$\Theta_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \frac{m^2}{2}\sum_{r,s=1}^{n-1} C_{r-1,s-1}(\alpha;\beta)(F^{(r)}{}_{\mu}F^{(s)}{}_{\nu}+F^{(r)}{}_{\nu}F^{(s)}{}_{\mu}-g_{\mu\nu}F^{(s)}{}_{\rho}F^{(r)\rho}))\,. \tag{30}$$

Здесь $\beta_r$ - параметры закона сохранения. Матрица Безу $C_{r,s}(\alpha,\beta)$ многолчленов $P(\alpha;z)$, $Q(\beta;z)$ определяется по правилу

$$C_{r,s}(\alpha,\beta) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial z^r\partial u^s}\frac{P(\alpha,z)Q(\beta,u)-P(\alpha,u)Q(\beta;z)}{z-u}\bigg|_{z=u=0} \tag{31}$$

$$P(\alpha;z)=\sum_{r=1}^{n}\alpha_r z^r\,,\qquad Q(\beta;z)=\sum_{r=0}^{n-1}\beta_r z^{r+1}\,. \tag{32}$$

Интеграл движения:

$$J(\alpha,\beta)=\int\Theta_{00}(\alpha,\beta)d^2\boldsymbol{x}\,. \tag{33}$$

Энергия: $\beta_1=1,\beta_2=\ldots=\beta_n=0.$

# Формулировка первого порядка

Пусть ${F^r}_i, i = 1, 2,$ – пространственные компоненты векторов $F^r$. Тогда система уравнений Лагранжа может быть переписана в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
&\dot{A}_i = \partial_i A_0 - m\epsilon_{ij} F_j\,;\\
&\dot{F^r}_i = \epsilon_{ij}\partial_k(\partial_k {F^{r-1}}_j - \partial_j {F^{r-1}}_k) - m\epsilon_{ij}{F^{r+1}}_j\,, \quad r = 1, \dots, n-2;\\
&\dot{F}^{n-1}{}_i = \epsilon_{ij}\partial_k(\partial_k {F^{n-2}}_j - \partial_j {F^{n-2}}_k) + \epsilon_{ij}\frac{m^{n-2}}{\alpha_n}\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_r {F^r}_j\,;\\
&\Sigma \equiv \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{r+1}\epsilon_{ij}\partial_i {F^r}_j = 0\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Определяющее уравнение для неизвестной скобки Пуассона и вспомогательных констант $k_s, s = 0, \dots, n-2$:

$$
\dot{F^r}_i = \{{F^r}_i, \int \Big(\Theta_{00}(\alpha, \beta) + \sum_{s=0}^{n-2} k_s\epsilon_{jk}\partial_k {F^s}_k\Sigma\Big) d^2\boldsymbol{x}\}_{\alpha,\beta}\,, \qquad \Sigma = 0\,. \tag{35}
$$

# Скобка Пуассона

Решение:

$$\{F^r{}_i(\boldsymbol{x}), F^s{}_j(\boldsymbol{y})\}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{m}\epsilon_{ij}\frac{\Delta^{r,s}(\alpha,\beta)}{\mathrm{det}C(\alpha,\beta)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,. \tag{36}$$

где матрица $\Delta^{r,s}$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\Delta^{rs}(\alpha,\beta) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & M^{r,s-1}(\alpha,\beta) \\ \hline M^{1,s}(\alpha,\beta) & \displaystyle\sum_{r=1}^{n-1}\alpha_r M^{r,n-1}(\alpha,\beta) \end{array}\right)\,. \tag{37}$$

Константы $k_r$:

$$k_0 = -\frac{\mathrm{det}C_{(\alpha,\beta)}}{\gamma\alpha_1 + \displaystyle\sum_{s=2}^{n-1}\alpha_s M^{1,s-1}(\alpha,\beta)} \tag{38}$$

$$k_r = \frac{\gamma C_{r-1}(\alpha,\beta) + \displaystyle\sum_{s=2}^{n-1}\alpha_s C_{r,s}(\alpha,\beta)M^{r,s-1}(\alpha,\beta)}{\gamma\alpha_1 + \displaystyle\sum_{s=2}^{n-1}\alpha_s M^{1,s-1}(\alpha,\beta)}, \quad r = 2,\ldots,n-2. \tag{39}$$

Здесь $M^{r,s}(\alpha,\beta)$ - миноры матрицы Безу $C_{r,s}(\alpha,\beta)$, $\gamma$ - константа.

# Основной результат

## Утверждение 2.

*Расширенная теория Ч.-С. допускает $n$-параметрическое семейство гамильтоновых формулировок*

$$\dot{F}^r{}_i = \left\{ F^r{}_i, \int \left( \Theta_{00}(\alpha,\beta) + \sum_{s=0}^{n-2} k_s \epsilon_{jk} \partial_k F^s{}_k \Sigma \right) d^2\boldsymbol{x} \right\}_{\alpha,\beta}, \qquad \Sigma = 0\,, \tag{40}$$

*где $\Theta^{00}(\alpha,\beta)$ – ноль-ноль компонента сохраняющегося тензора, а $\{\cdot\,,\cdot\}_{\alpha,\beta}$ – скобка Пуассона (36), (37). Гамильтонова формулировка хорошо определена, если*

$$\mathit{det}C(\alpha,\beta) \neq 0\,, \qquad \gamma\alpha_1 + \sum_{s=2}^{n-1} \alpha_s M^{1,s-1}(\alpha,\beta) \neq 0\,. \tag{41}$$

*Функция Гамильтона ограничена снизу, если матрица Безу $C_{r,s}(\alpha,\beta)$ положительно определена.*

# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НЕТЕР

# Лагранжев якорь

## Определение.

*Пусть динамика теории задана уравнениями движения* $T_A(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(m)}) = 0$, $A = 1, \dots, L$. *Лагранжевым якорем называется матричный дифференциальный оператор*

$$\widehat{V} = (\widehat{V}_{Aa}), \qquad \widehat{V}_{Aa} = \sum_{r=1}^{m_V} V^r{}_{Aa}(t, q, \dots, q^{(m)}) \frac{d^r}{dt^r}\,, \tag{42}$$

*чье интегральное ядро* $V_{aA}(t, t')$ *удовлетворяет соотношению*

$$\int V_{Aa}(t, t') \frac{\delta T_B(t'')}{\delta q_a(t')} dt' - (A, t \leftrightarrow B, t'') \Big|_{T_A = 0} = 0\,. \tag{43}$$

## Пример 2.

*Пусть* $T_a = \dot{x}_a - v_a(x)$. *Тогда лагражев якорь есть инвариантный пуассонов бивектор,*

$$V_{ab} = \alpha_{ab}\,, \qquad \alpha_{ad}\partial_d\alpha_{bc} + \textit{cycle(a,b,c)} = 0\,, \qquad L_v\alpha = 0\,. \tag{44}$$

# Обобщение теоремы Нетер

## Теорема 1.

*Пусть J – интеграл движения, отвечающий характетристике $Q$, то есть*

$$\frac{dJ}{dt} = Q_A(t, \dot{q}, \ldots)T_A(t, q, \dot{q}, \ldots). \tag{45}$$

*Тогда*

$$\delta_\epsilon q_a = \int V_{aA}(t', t)Q_A(t', q(t'), \ldots)dt', \qquad \delta_\epsilon T_A\Big|_{T_A=0} = 0. \tag{46}$$

*есть преобразование симметрии уравнений $T_A = 0$.*

## Следствие.

*Пусть J – интеграл движения, $T_a = \delta S/\delta q_a$. Тогда*

$$\delta_\epsilon q_a = Q_a(t, q, \ldots), \qquad \delta_\epsilon T_A\Big|_{T_A=0} = 0. \tag{47}$$

*есть преобразование симметрии уравнений $T_a = 0$.*

# Модели производного типа

Пусть

$$T_a = \left(\sum_{r=0}^{n} \alpha_r \widehat{W}^r\right)_{ab} q_b = 0\,, \qquad W_{ab}(t,t') = W_{ba}(t',t). \tag{48}$$

Тогда система имеет $n$-параметрическое семейство интегралов движения

$$\widehat{V}(\gamma, W) = \sum_{r=0}^{n-1} \gamma_r W^r, \qquad \frac{dJ}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{r=0}^{n} \beta_r W^r\right)_{ab} q_a T_b\,. \tag{49}$$

Интеграл движения $J(\alpha, \beta)$ связан с инвариантностью модели относительно трансляций по времени, если

$$\widehat{V}(\gamma, W)\widehat{Q}(\beta, W) = 1 \qquad (\mathrm{mod}\,\widehat{P}(\alpha, W)), \tag{50}$$

где использовано обозначение

$$\widehat{P}(\alpha, W) = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r \widehat{W}^r\,, \qquad \widehat{Q}(\beta, W) = \sum_{r=0}^{n} \beta_r \widehat{W}^r\,. \tag{51}$$

Спасибо за внимание!