Алгебры Ли максимального класса

Д.В. Миллионщиков

мех-мат МГУ им. М.В. Ломоносова
& РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина

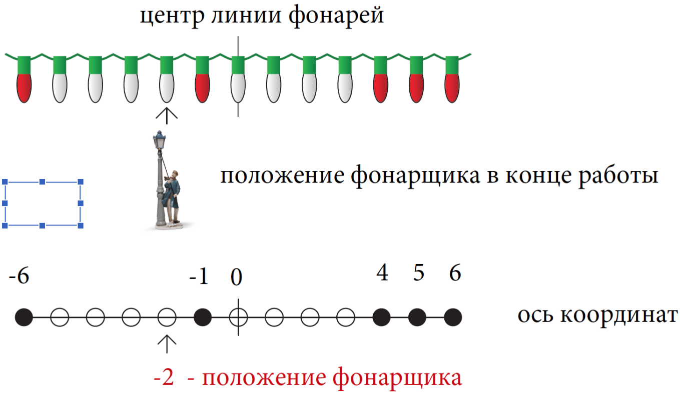
"Декабрьские чтения в Томске"

6 декабря 2021

- Ламповые группы
- Ламповая алгебра Ли
- Филиформные алгебры Ли и алгебры Ли максимального класса
- Парасвободные алгебры Ли
- Теорема Иванова, Михайлова и Зайковского о про-нильпотентном пополнении свободной алгебры Ли
- Ответ на вопрос Феликса и Мурильо

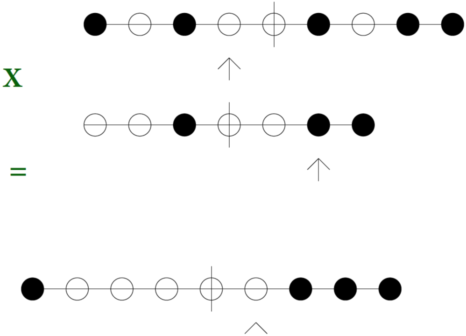
Фонарщик из книги Антуана де Сент-Экзюпери

Lamplighters group или ламповая группа - Jim Cannon



Данные о состоянии системы: $(\{-6,-1,4,5,6\}, -2)$

Умножение в ламповой группе



Результат

Как множество это $\mathbb{Z} \times \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ с операцией умножения

$$(k, \{a_n\}) \star (l, \{b_m\}) = (k+l, \{c_n\}), \quad c_n = a_n + b_{n-k}, n \in \mathbb{Z}.$$

Удобнее рассмотреть лорановские ряды $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n, a_n \in \mathbb{Z}_2$:

$$\left(k, \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n\right) \star \left(l, \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n x^n\right) = \left(k+l, \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n + x^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n x^n\right).$$

Целочисленная ламповая группа $L(\mathbb{Z})$ и матрицы

Рассмотрим 2×2-матрицы

$$\begin{pmatrix} t^k & p(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z},\ p(x) \in \mathbb{Z}_2[x, x^{-1}].$$

Со стандартным матричным умножением.

Целочисленная ламповая группа $L(\mathbb{Z})$, рассмотренная Сергеем Ивановым и Романом Михайловым (2021) – в ней рассматриваются матрицы с лорановскими многочленами $p(t)$ с целыми коэффициентами $p(x) \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$.

Ламповая алгебра Ли

Определение (Иванов, Михайлов, Зайковский 2021)

Рациональная ламповая алгебра Ли определена как полупрямое произведение $\mathfrak{l} = \mathbb{Q}t \ltimes \mathbb{Q}[x]$ одномерной $\mathbb{Q}t$ и бесконечномерной абелевой $\mathbb{Q}[x]$ с соотношениями

$$[t, p(x)] = xp(x), \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x]$$

Филиформные алгебры Ли

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, если найдется $s > 0$

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^s \supset \mathfrak{g}^{s+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^s] = 0, \ \mathfrak{g}^s \neq 0.$$

При этом $s \leq \dim \mathfrak{g} - 1$.

Определение (Мишель Верно, 1970)

Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется филиформной, если $s = \dim \mathfrak{g} - 1$.

Пример

$\mathfrak{m}_0(n)$ определяется базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и соотношениями

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, 2 \leq i \leq n-1, \quad [e_i, e_k] = 0, \ i, k \neq 1, i + k > n.$$

Про-нильпотентные алгебры Ли

Определение

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется про-нильпотентной, если

$$\cap_{k=1}^{\infty}\mathfrak{g}^k = \{0\}, \quad \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^k < \infty, \; k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим обратный спектр нильпотентных алгебр Ли

$$\dots \xrightarrow{p_{k+2,k+1}} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{k+1} \xrightarrow{p_{k+1,k}} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^k \xrightarrow{p_{k,k-1}} \dots \xrightarrow{p_{3,2}} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^2 \xrightarrow{p_{2,1}} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^1,$$

Его обратный предел $\widehat{\mathfrak{g}} = \varprojlim_k \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^k$ называется *пополнением* $\mathfrak{g}$.

Про-нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *полной*, если включение $\mathfrak{g} \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ является изоморфизмом $\mathfrak{g} \cong \widehat{\mathfrak{g}}$.

Пример

Алгебра Ли $\mathfrak{m}_0$ определяется бесконечным базисом $e_1, e_2, e_3, \dots$ и соотношениями

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, i \geq 2, \quad [e_i, e_k] = 0,\ i, k \neq 1.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{m}_0 = \oplus_{i=1}^{+\infty} \langle e_i \rangle$ не является полной.

Ее пополнением $\widehat{\mathfrak{m}}_0$ является алгебра Ли $\widehat{\mathfrak{m}}_0 = \prod_{i=1}^{+\infty} \langle e_i \rangle$ формальных рядов $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i$.

Замечание

$\mathfrak{m}_0$ и ламповая алгебра $\mathfrak{l}$ изоморфны как алгебры Ли.

Введем обозначения $t = e_1$, а также $e_2 = 1, e_3 = x, e_4 = x^2, \dots$

Алгебры Ли максимального класса

Определение (Зельманов, Шалев, 1990)

Коклассом $cc(\mathfrak{g})$ про-нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется число, возможно равное $+\infty$, определенное формулой

$$cc(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\dim(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1}) - 1\right).$$

Пример

$$cc(\mathfrak{m}_0) = (2-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 1$$

Определение

Алгебра Ли кокласса один $cc(\mathfrak{g}) = 1$ называется алгеброй Ли **максимального класса**.

Классификация

Теорема (Зельманов и Шалев 1997, Фиаловски 1983)

Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *– бесконечномерная* $\mathbb{N}$*-градуированная алгебра Ли*

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, i, j \in \mathbb{N},$$

максимального класса $cc(\mathfrak{g}) = 1$*. Тогда* $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной алгебре Ли из трех данных*

$$\mathfrak{m}_0,\ \mathfrak{m}_2,\ W^+,$$

где W^+ *– положительная часть алгебры Витта, а алгебра Ли* $\mathfrak{m}_2$ *определена соотношениями*

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, i \geq 2, \quad [e_2, e_j] = e_{j+2}, j \geq 3.$$

Определение

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется парасвободной, если
1) $\cap_{k=1}^{\infty}\mathfrak{g}^k = \{0\}$;
2) существует свободная алгебра Ли $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}$ и гомоморфизм $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$, который индуцирует изоморфизмы $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}/{\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}}^k \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^k$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Пример (Baur, Stammbach, 1980)

$\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathcal{L}(z, y_0, y_1, y_2, \dots)$ – полупрямая сумма одномерной $\langle x \rangle$ и свободной алгебры Ли, порожденной набором $z, y_0, y_1, \dots,$ и с соотношениями

$$[x, y_i] = y_{i+1}, i \geq 0,$$
$$[x, z] = z + [y_1, y_0].$$

У парасвободной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеется изоморфизм $\widehat{\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}} \cong \widehat{\mathfrak{g}}$.

Знаменитая **теорема Столлингса-Суона** утверждает, что группа **когомологической размерности один** является **свободной**.

Бурбаки в книге "Группы и алгебры Ли", глава 2, §2, спросили: "Верно ли аналогичное утверждение для алгебр Ли, **является ли алгебра Ли когомологичкой размерности один свободной?"**

Фельдман (УМН, 1983) положительно ответил на этот вопрос для два-порожденных алгебр Ли.

Михалев (мл.), Умирбаев и Золотых в 1996 построили **пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности один** над полем характеристики $p > 2$.

Случай **нулевой характеристики** и характеристики $p = 2$ остается по-прежнему **открытым**.

Одной из целей Иванова, Михайлова и Зайковского в рамках программы Баумслага является построение примеров счетных (вообще говоря, не конечно порожденных) **парасвободных групп с ненулевой** H_2 и (или) когомологической размерностью больше двух. В 2021 году они построили счетные парасвободные алгебры Ли с ненулевой H_2, а также пример парасвободной алгебры Ли когомологической длины больше двух.
В процессе доказательства ими было сделано интересное наблюдение: **вторые гомологии** $H_2(\widehat{\mathcal{L}}(2), \mathbb{Z})$ **про-нильпотентного пополнения свободной алгебры Ли** $\mathcal{L}(2)$ **от двух образующих имеют несчетную размерность** притом, что у самой свободной алгебры Ли $\mathcal{L}(2)$ они тривиальны $H_2(\mathcal{L}(2), \mathbb{Z}) = 0$.

Иванов, Михайлов и Зайковский использовали свойства гомологий **ламповой алгебры Ли** $\mathfrak{l}$ над кольцом $\mathbb{Z}$. В частности они предъявили гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{L}(2) \to \mathfrak{l},$$

инцирующее отображение

$$H_2(\widehat{\mathcal{L}}(2), \mathbb{Z}) \to H_2(\widehat{\mathfrak{l}}, \mathbb{Z})$$

в гомологиях с образом

$$Im\varphi \cong \mathbb{Z}[[u]],$$

изоморфному кольцу целочисленных формальных рядов от переменной u.

Гомологии алгебры цепей $(\Lambda^*(\mathfrak{g}), \delta)$ с коэффициентами в кольце R с граничным оператором δ

$$\delta(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \widehat{x_i} \dots \widehat{x_i} \dots \wedge x_p,$$

для любого $p \geq 2$. В частности $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{cases} \delta(x \wedge y) = -[x, y], \\ \delta(x \wedge y \wedge z) = -[x, y] \wedge z + x \wedge [y, z] - y \wedge [x, z]. \end{cases}$$

Гомологии $H_*(\mathfrak{g}, R)$ определим как гомологии $(\Lambda^*(\mathfrak{g}), \delta)$.

Félix, Murillo (2021) показали явным образом, как сильно отличаются два пространства цепей, связанных с пополнениями:

$$\Lambda^*(\widehat{\mathcal{L}}(2)) \subset \widehat{\Lambda^*}(\mathcal{L}(2)).$$

Двумерные гомологии H_2 комлекса $\widehat{\Lambda}(\mathcal{L}(2))$ тривиальны, но удается найти такое несчетное множество цепей вида $c \in \widehat{\Lambda^3}(\mathcal{L}(2))$, дифференциалы δc которых лежат в меньшем подкомплексе $\Lambda^2(\widehat{\mathcal{L}}(2))$ и там определяют нетривиальные двумерные классы гомологий.

Félix, Murillo (2021) показали, что в случае ламповой алгебры Ли $\mathfrak{l}$ все q-е гомологии $H_q(\widehat{\mathfrak{l}}, \mathbb{Q})$ несчетны.

Замечание

Этот факт являются следствием теоремы М. и Фиаловски (2008), в которой были вычислены биградуированные когомологии $H^p_{(q)}(\mathfrak{m}_0, \mathbb{Q})$ алгебры Ли максимального класса $\mathfrak{m}_0 \cong \mathfrak{l}$.

Вопрос Félix, Murillo, 2021, TAMS.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечнопорожденная алгебра Ли над $\mathbb{Q}$ такая, что $\cap_{n=1}^{+\infty}\mathfrak{g}^k = 0$. Пусть $\dim \widehat{\mathfrak{g}} = \infty$, всегда ли $H_2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{Q})$ будет иметь несчетную размерность?

Ответ: **нет**. Пример: $\mathfrak{m}_2$ – алгебра Ли максимального класса, которая задается базисом $e_1, e_2, e_3, \dots$ и соотношениями

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, [e_2, e_j] = e_{j+2}, i \geq 2, j \geq 3.$$

Из вычислений М., Fialowski, J. of Algebra (2008) следует, что

$$\dim H_2(\widehat{\mathfrak{m}_2}, \mathbb{Q}) = 2.$$

Маленький принц и фонарщик

Маленький принц никак не мог понять, для чего на крохотной, затерявшейся в небе планетке, где нет ни домов, ни жителей, нужны фонарь и фонарщик. Но он подумал:

"Может быть, этот человек и нелеп. Но он не так нелеп, как король, честолюбец, делец и пьяница. В его работе все-таки есть смысл. Когда он зажигает свой фонарь - как будто рождается еще одна звезда или цветок. А когда он гасит фонарь - как будто звезда или цветок засыпают. Прекрасное занятие. Это по-настоящему полезно, потому что красиво".

И, поравнявшись с этой планеткой, он почтительно поклонился фонарщику.