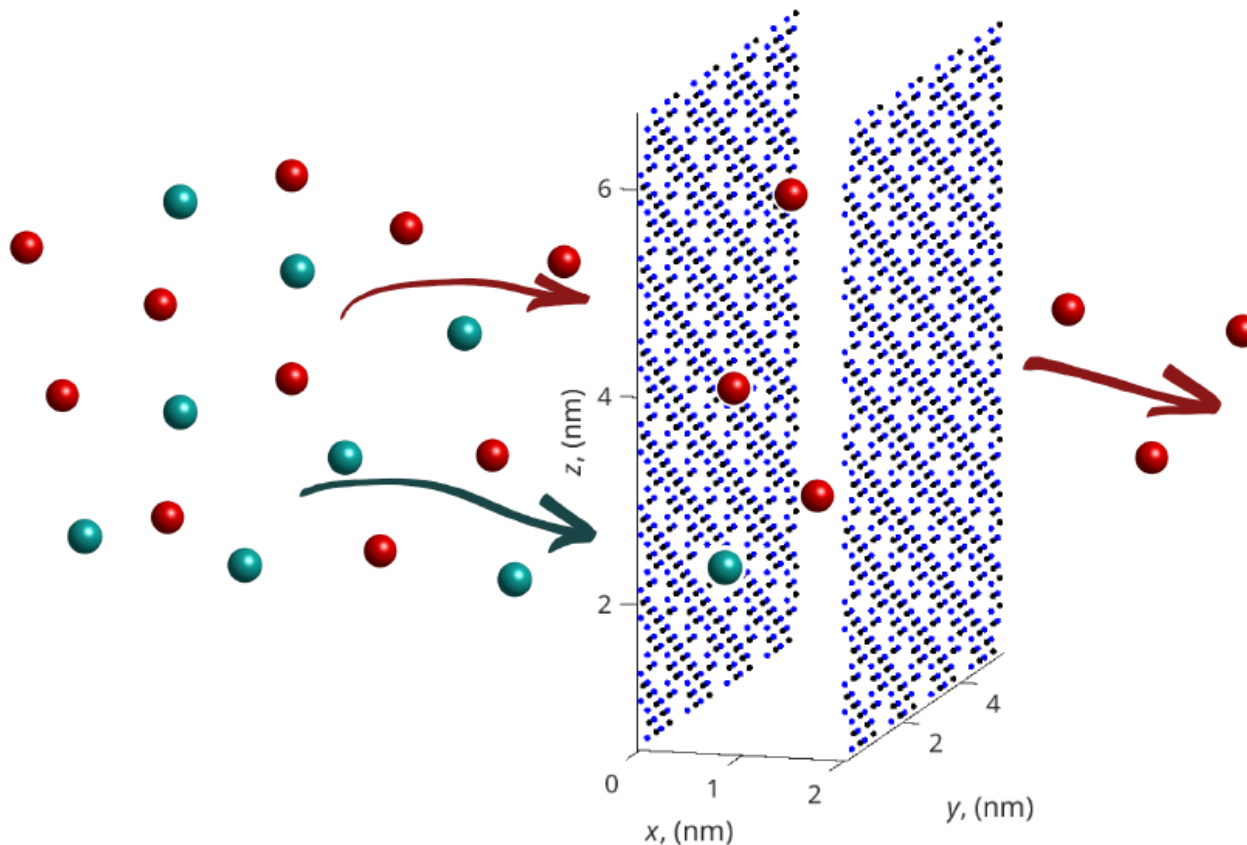


# Волновые процессы переноса через многослойные системы

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор,  
ведущий научный сотрудник регионального научно-  
образовательного математического центра ТГУ

# Физическая постановка задачи

В задаче смесь изотопов гелия преодолевает двуслойную мембрану в направлении, перпендикулярном плоскости мембраны.



# Стандартное решение дифференциального уравнения Шредингера

Стационарное дифференциальное уравнение Шредингера:

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar}(E - U(z))\Psi = 0, \quad (1)$$

$\Psi$  – волновая функция,  $m$  – масса движущейся молекулы,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $E$  – энергия движущейся молекулы.

На удалении от барьера:

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + k^2\Psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}E}. \quad (2)$$

Зависимость  $\Psi$  от рассматриваемого интервала:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= e^{ikz} + Ce^{-ikz}, \quad z < 0, \\ \Psi(z) &= A\Psi_1(z) + B\Psi_2(z), \quad 0 < z < L, \\ \Psi(z) &= De^{ik(z-L)}, \quad z > L. \end{aligned} \quad (3)$$

# Стандартное решение дифференциального уравнения Шредингера

Найти  $D^2$  можно из условий сшивки решения в области действия барьера и за его пределами:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(0) & \Psi_2(0) & -1 & 0 \\ \Psi_1'(0) & \Psi_2'(0) & ik & 0 \\ \Psi_1(L) & \Psi_2(L) & 0 & -1 \\ \Psi_1'(L) & \Psi_2'(L) & 0 & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение Шредингера в одномерном случае приводит к безразмерному виду:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k^2 - 2mU(x)] \psi = 0; k = \sqrt{2mE}. \quad (5)$$

Граничное условие на большом удалении от барьера:

$$\psi \simeq e^{ikx} + Ae^{-ikx} (x \rightarrow -\infty); \psi \simeq Be^{ikx} (x \rightarrow \infty). \quad (6)$$

# Дифференциальное и интегральное уравнения Шредингера

Интегральное уравнение имеет вид:

$$\psi(x) - \frac{m}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 = e^{ikx}. \quad (7)$$

Неоднородное интегральное уравнение (7) содержит в себе граничные условия (6), в чем можно убедиться, если переписать в более удобном виде:

$$\psi(x) = e^{ikx} \left[ 1 + \frac{m}{ik} \int_{-\infty}^x e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right] + e^{-ikx} \left[ \frac{m}{ik} \int_x^{\infty} e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0 \right].$$

# Дифференциальное и интегральное уравнения Шредингера

В квадратных скобках стоят падающая и отраженная волны:

$$a_{passed} = 1 + \frac{m}{ik} \int_{-\infty}^x e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0,$$
$$a_{reflected} = \frac{m}{ik} \int_x^{\infty} e^{ikx_0} U(x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (8)$$

Это соответствует уравнению (6). Коэффициенты прохождения и отражения определяются:

$$\rho_{passed} = |a_{passed}|^2, \rho_{reflected} = |a_{reflected}|^2. \quad (9)$$

Многочлены Эрмита  $He_n(x)$  были введены еще в 1864 г.

Явные выражения для первых многочленов:

$$\begin{aligned}
 He_0 &= 1; He_1(x) = x; He_2(x) = x^2 - 1; He_3(x) = x^3 - 3x; \\
 He_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3; He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x;
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Многочлены Эрмита можно записать в форме определителя:

$$He_n(x) = \begin{vmatrix} x & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & n-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & n-3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}
 \tag{11}$$

В задачах математической физики применяются функции Эрмита, которые связаны с многочленами Эрмита соотношением:

$$D_n(x) = \frac{e^{x^2/4} H e_n(x)}{\sqrt{n! \sqrt{2\pi}}}. \quad (12)$$

Функции Эрмита позволяют определять коэффициенты разложения произвольных функций в ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n D_n(x); \quad C_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) D_n(\mu) d\mu. \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) D_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$



# Сведения из теории функций Эрмита

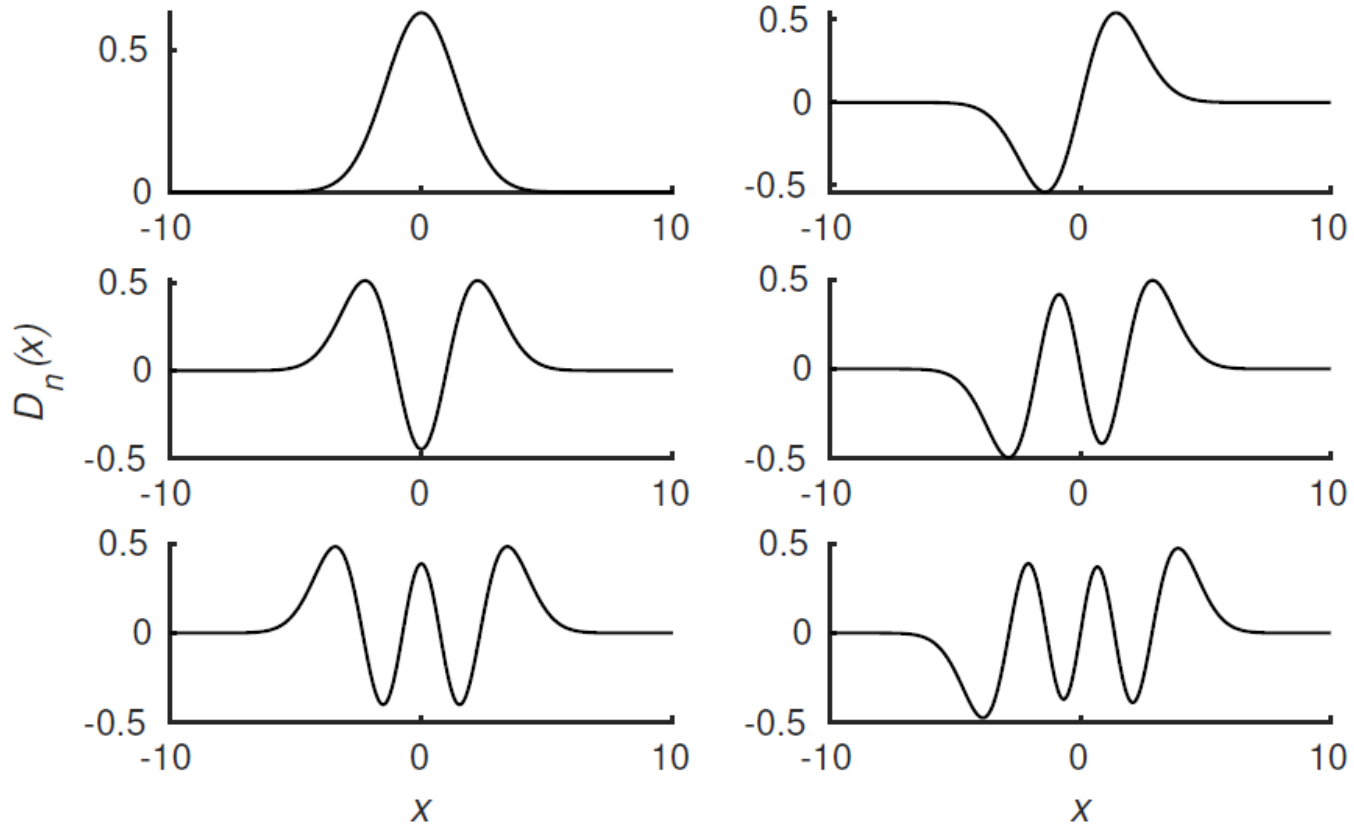


Рисунок 1 – Графики первых шести функций Эрмита



# Сведения из теории функций Эрмита

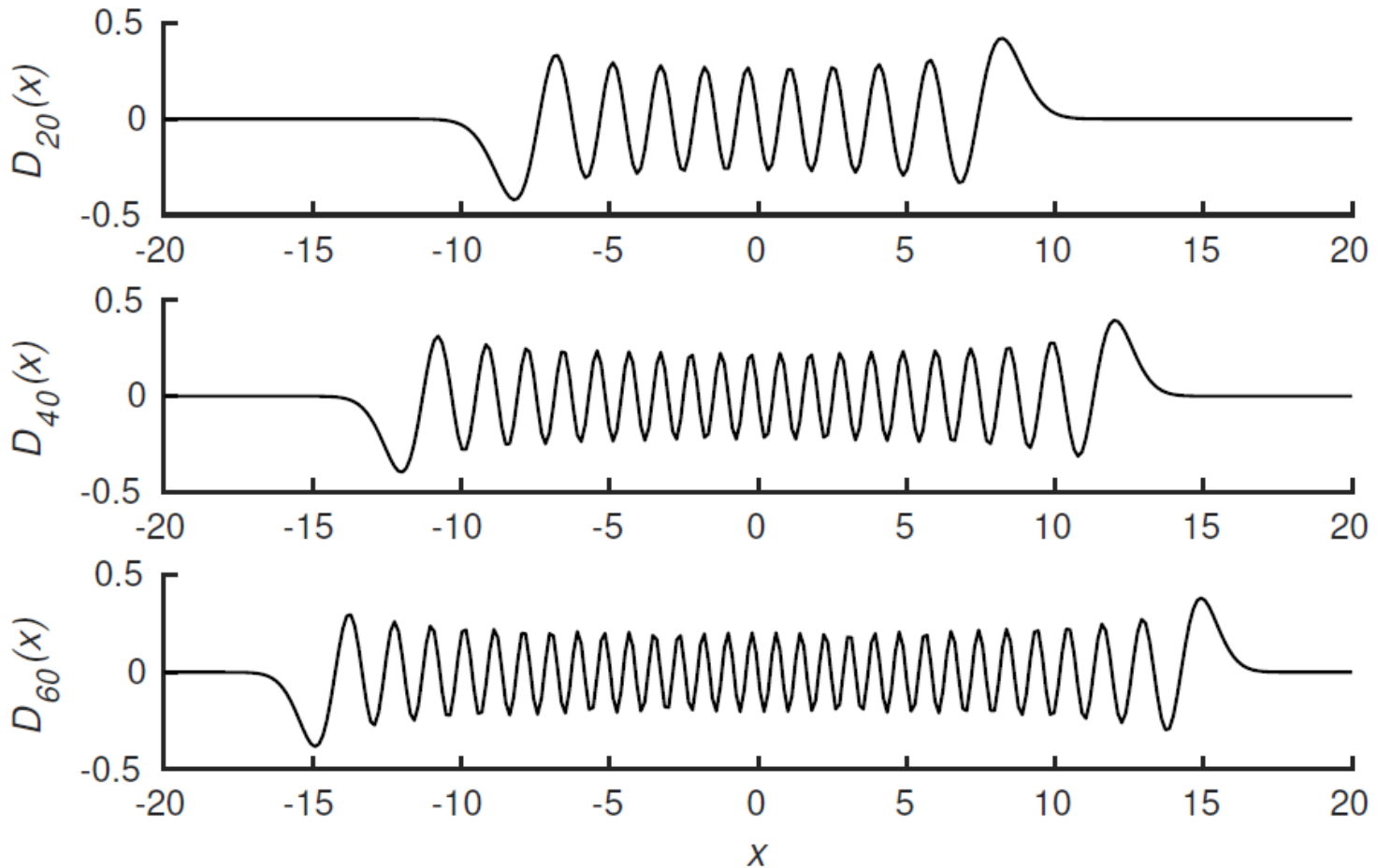


Рисунок 2 – Графики функций Эрмита более высокого порядка:  $D_{20}(x)$ ,  $D_{40}(x)$ ,  $D_{60}(x)$

Будем искать решение уравнения (7) в виде отрезка ряда с коэффициентами  $C_n$  по функциям Эрмита:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n=0}^N C_n D_n(x); \\ e^{ik|x-x_0|} &= \sum_{n=0}^N D_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\mu-x_0|} D_n(\mu) d\mu; \\ e^{ikx} &= \sum_{n=0}^N D_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu} D_n(\mu) d\mu;\end{aligned}\tag{14}$$

Подставляя (14) в (7) и приравнявая члены при одинаковых функциях  $D_n(x)$ :

$$C_n - \frac{m}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0) \psi(x_0) e^{ik|\mu-x_0|} D_n(\mu) d\mu dx_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu} D_n(\mu) d\mu. \quad (15)$$

$$C_n - \frac{m}{ik} \sum_{r=0}^N C_r \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0) e^{ik|\mu-x_0|} D_n(\mu) D_r(x_0) d\mu dx_0 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu} D_n(\mu) d\mu. \quad (16)$$

Двойной интеграл можно рассматривать как квадратичную матрицу  $\mathbf{G}$  порядка  $N$ , а правую часть как вектор-столбец  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{G}(k, n, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0) e^{ik|\mu-x_0|} D_n(\mu) D_r(x_0) d\mu dx_0; \quad \mathbf{F}(k, n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu} D_n(\mu) d\mu. \quad (17)$$

Равенство (15) представляет собой систему уравнений:

$$\left[ \mathbf{E}_N - \frac{m}{ik} \mathbf{G} \right] \mathbf{C} = \mathbf{F}. \quad (18)$$

Многие интегралы, содержащие функции Эрмита, вычисляются в явном виде [Градштейн, Рыжик]:

$$\mathbf{F}(k, n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu} D_n(\mu) d\mu = \sqrt{4\pi} i^n D_n(2k). \quad (19)$$

Можно представить в явном виде следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\mu-x_0|} D_n(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{x_0} e^{ik(x_0-\mu)} D_n(\mu) d\mu + \int_{x_0}^{\infty} e^{ik(\mu-x_0)} D_n(\mu) d\mu.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|\mu-x_0|} D_n(\mu) d\mu = \sqrt{4\pi} i^n D_n(2k) e^{-ikx_0} + 2i S_n(x_0), \quad (20)$$

$$S_n(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \sin k(x_0 - \mu) D_n(\mu) d\mu.$$

Таким образом элементы матрица  $\mathbf{G}$  и вектора  $\mathbf{F}$  принимают вид:

$$\mathbf{G}(k, n, r) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x_0) D_r(x_0) \left[ \sqrt{4\pi} i^n D_n(2k) e^{-ikx_0} + 2i S_n(x_0) \right] dx_0; \quad (21)$$

$$\mathbf{F}(k, n) = \sqrt{4\pi} i^n D_n(2k).$$

Для описания системы частиц в целом необходимо учесть распределение Больцмана для каждой из компонент:

$$f(E, T) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kT E}} e^{-E/kT}. \quad (22)$$

Коэффициент проницаемости:

$$S = \int \rho_{passed}(E) f(E, T) dE. \quad (23)$$

# Потенциальная энергия барьера

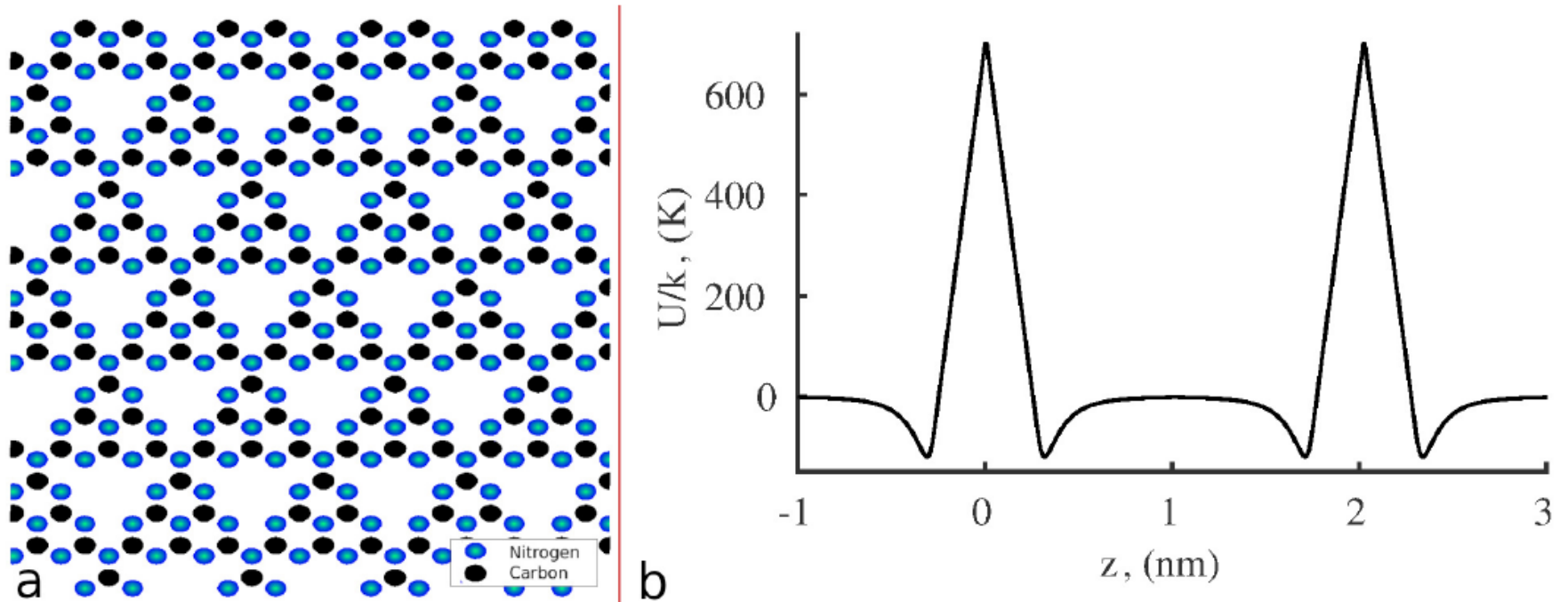


Рисунок 3 – Структура листа мембраны из графитового нитрида углерода (a) и потенциальный барьер двуслойной мембраны (b), построенный на основе

модификации LJ-потенциала: 
$$V_{LJmod}(\rho) = 4\varepsilon \frac{\sigma}{\rho} \tanh \left[ \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^{11} - \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^5 \right]$$



Предварительно проведено сравнение результатов расчетов по предложенной модели с аналитическим решением в случае:  $U(z) = \frac{1}{ch^2(ax)}$ .

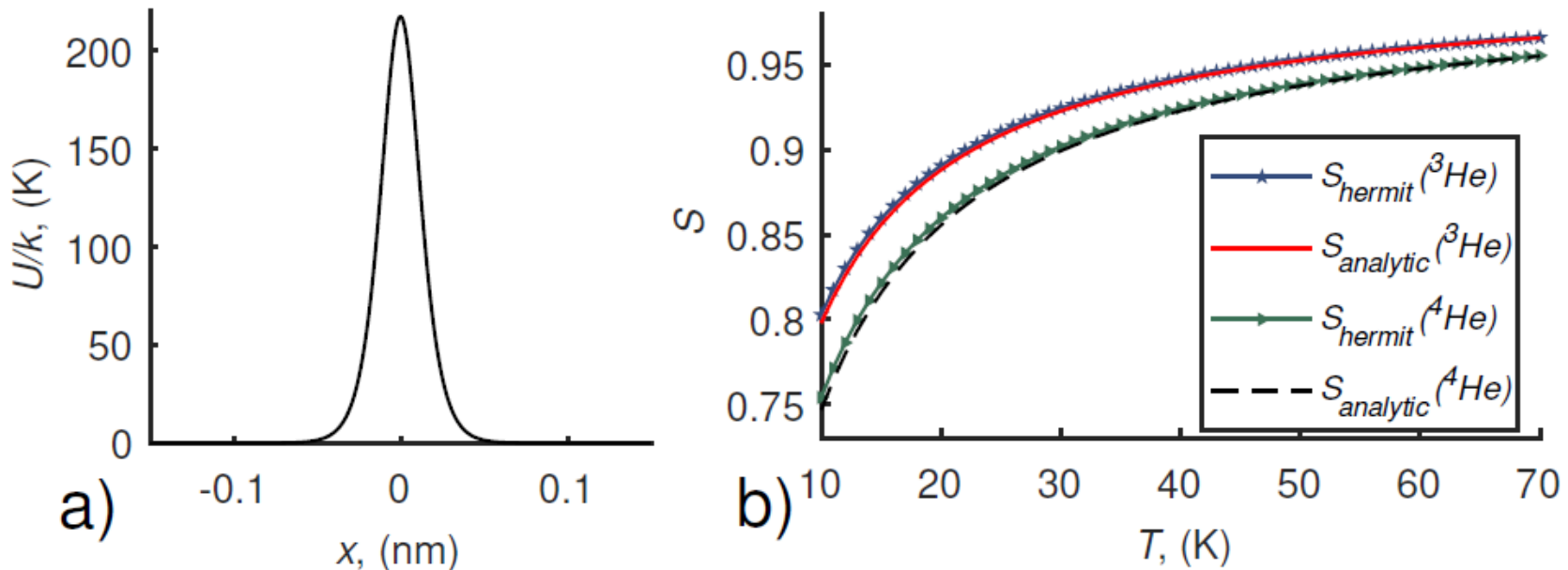


Рисунок 4 – Форма потенциального энергетического барьера (a) и проницаемость мембраны для изотопов гелия (b).

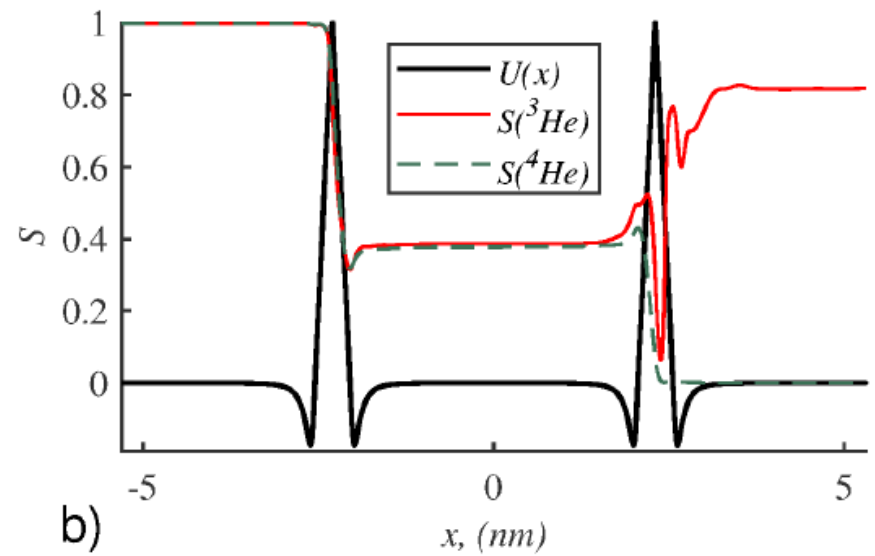
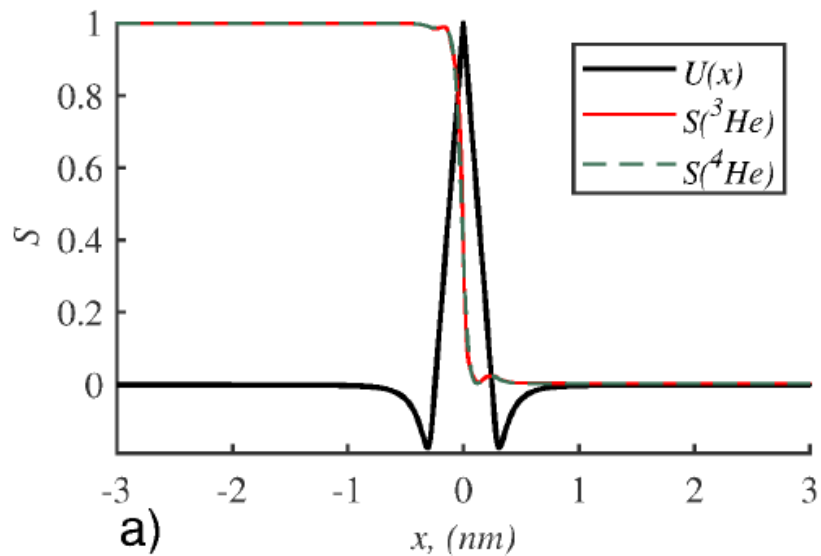


Рисунок 5 – Проницаемость однослойной (a) и двуслойной (b) мембраны нитрида углерода,  $T = 12$  К,  $b = 4.6$  нм.

# Тестирование и результаты расчетов

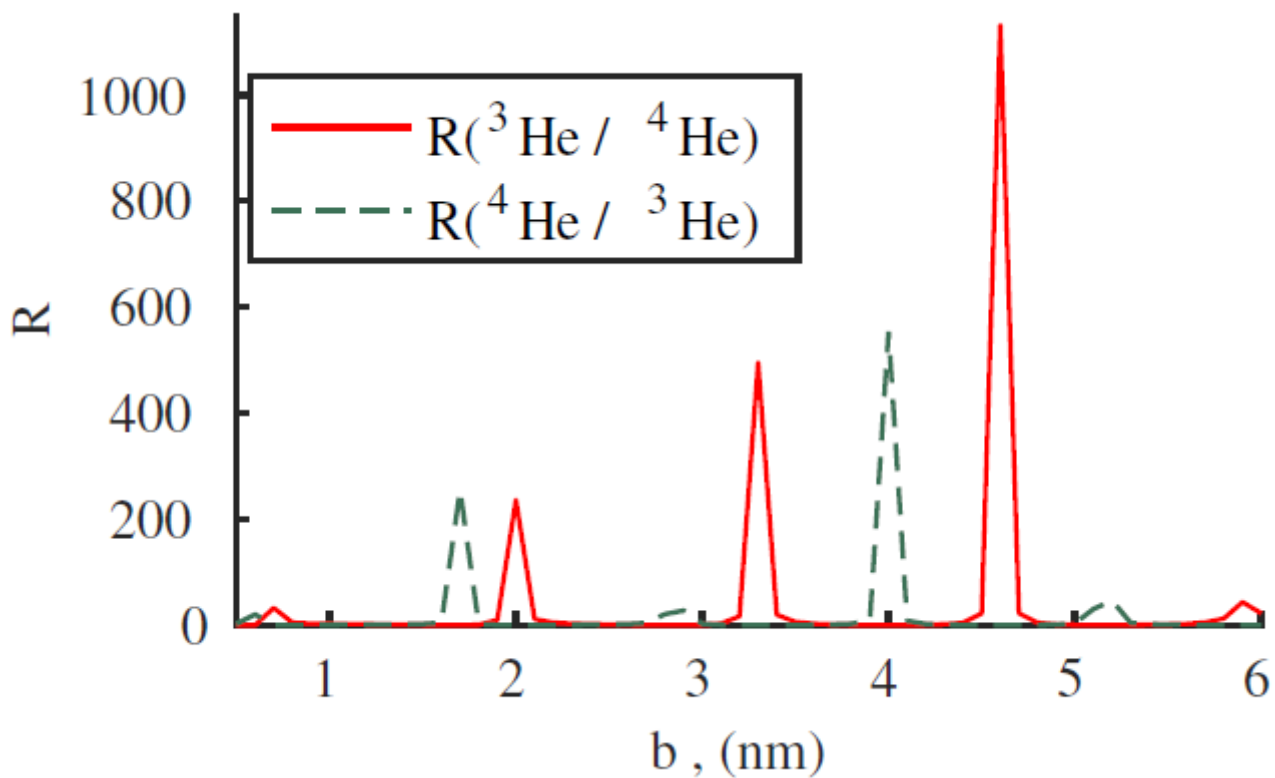


Рисунок 6 – Зависимость степени разделения смеси газов  $R$  от расстояния между слоями мембраны  $b$ .

- + Представлен эффект резонансного прохождения частиц через двухслойные барьеры
- + Предложен способ получения вероятности прохождения частицами барьера из точного решения интегрального уравнения Шредингера
- + Найдены условия, отвечающие наибольшей степени разделения изотопов гелия
- Небольшое отклонение в расстояния между слоями или температуре приводит к существенному изменению проницаемости

# Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Интегральное уравнение Шредингера:

$$\psi(x) - \frac{2m}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-\zeta|} U(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = e^{ikx}, \quad k = \sqrt{2mE}. \quad (24)$$

Для разделения переменных в интегральном члене воспользуемся оператором сдвига:

$$e^{-h\frac{d}{dx}} f(x) = f(x-h) \quad (25)$$

Применяя (25) к (24) получим:

$$\psi(x) - \lambda \left( \int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta\frac{d}{dx}} d\zeta \right) e^{ik|x|} = e^{ikx}, \quad \lambda = \frac{m}{ik} = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (26)$$

# Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Выражение в скобках (26) является дифференциальным оператором и функцией параметра  $p$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta \frac{d}{dx}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) \psi(\zeta) e^{-\zeta p} d\zeta = L(p), \quad p = \frac{d}{dx} \quad (27)$$

(26) Запишем в виде

$$\psi(x) - \lambda L(p) e^{ik|x|} = e^{ikx} \quad (28)$$

Умножая (10) на  $U(x)e^{-xp}$  и интегрируя в бесконечных пределах получим:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \psi(x) e^{-xp} dx \right) - \lambda L(p) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x|} U(x) e^{-xp} dx \right) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) e^{-xp} dx \right) \quad (29)$$

Обозначим:

$$B(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) e^{-xp} dx, \quad Q(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x|} U(x) e^{-xp} dx \quad (30)$$

С учетом этих обозначений операторное равенство (29) примет вид:

$$L(p)[1 - \lambda Q(p)] = B(p) \quad L(p) = \frac{B(p)}{1 - \lambda Q(p)} \quad (31)$$

Если бы дифференциальный оператор  $L(p)$  действовал на показательную функцию обычного вида, то получили бы:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)e^{\mu x} = L(\mu)e^{\mu x} \quad (32)$$

# Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Экспоненту от модуля аргумента, как в (28), можно привести к обычной, если воспользоваться тождеством Фурье:

$$e^{ik|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{i\omega\alpha} e^{ik|\alpha|} d\alpha d\omega. \quad (33)$$

(28) примет вид:

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(-i\omega) e^{-i\omega x} e^{ik|\alpha|} e^{i\omega\alpha} d\alpha d\omega. \quad (34)$$

$$G(\omega) = \frac{\lambda B(-i\omega)}{1 - \lambda Q(-i\omega)} = L(-i\omega) \quad (35)$$



# Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Предположим, что функция  $G(\omega)$  является спектром некоторой функции  $K(x)$ , т.е. выполняются условия:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{i\omega x} dx, \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (36)$$

Наиболее компактная запись решения, в котором интеграл берется по направлению изменения физической переменной:

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{ik|x-\zeta|} d\zeta. \quad (37)$$

# Интегральное уравнение Шредингера и его преобразования

Перепишем решение (37) через интегралы с переменным верхним или нижним пределом:

$$\psi(x) = e^{ikx} \left[ 1 + \int_{-\infty}^x K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \right] + e^{-ikx} \left[ \int_x^{\infty} K(\zeta) e^{ik\zeta} d\zeta \right]. \quad (38)$$

По форме записи распределения  $\psi(x)$  в (38) можно сделать заключение об асимптотическом поведении волновой функции:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\approx e^{ikx} \left[ 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \right], & x \rightarrow \infty; \\ \psi(x) &\approx e^{ikx} + e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{ik\zeta} d\zeta, & x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Спектр Фурье для волновой функции  $\psi$  имеет вид:

$$G(\omega, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{i\omega x} dx = \frac{\lambda B(\omega, k)}{1 - \lambda B(\omega, k)}. \quad (40)$$

$B(\omega, k)$  зависит от формы потенциального барьера  $U(x)$  и представляется интегралом:

$$B(\omega, k) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{ix(\omega+k)} dx. \quad (41)$$

Коэффициент отражения  $R$  потока частиц:

$$R(k, \lambda) = \left| \frac{\lambda B(\omega, k)}{1 - \lambda B(\omega, k)} \right|_{\omega=k}^2. \quad (42)$$

# Пример расчета

Для модельных расчетов удобно применять потенциальный барьер в виде:

$$U_0(x) = e^{-\beta x^2}. \quad (43)$$

Для него базовая функция  $B_0(\omega, d)$  будет равна:

$$B_0(\omega, d) = 2 \cos \omega d \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\omega^2/4\beta}. \quad (44)$$

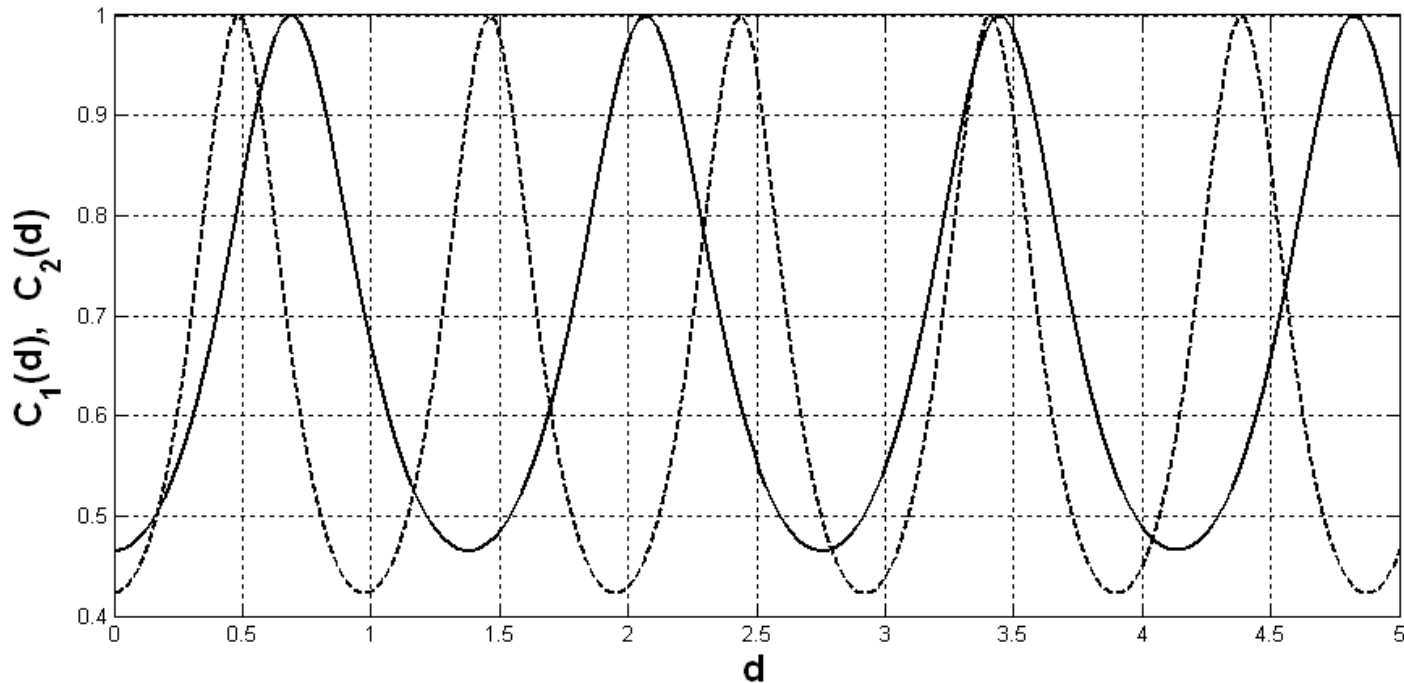


Рисунок 7 – Два графика зависимости коэффициента прохождения частиц от расстояния  $d$  между барьерами. Сплошной линии соответствует график для частицы с массой  $m = 2$ , для пунктирной линии –  $m = 5$ ,  $E = 0.8$ ,  $\beta = 4$ .

Для сравнительного анализа проходимости двух веществ нагляднее использовать графики относительных величин:

$$S_1(d) = \frac{C_1(d) - C_2(d)}{C_1(d)} \quad \text{и} \quad S_2(d) = \frac{C_2(d) - C_1(d)}{C_2(d)} \quad (45)$$

При условии  $S_i(d) > 0$ ,  $i=1,2$ , график функции  $S_i(d)$  показывает насколько  $i$ -ое, вещество проходит через двойной барьер лучше другого при одинаковом  $d$ .

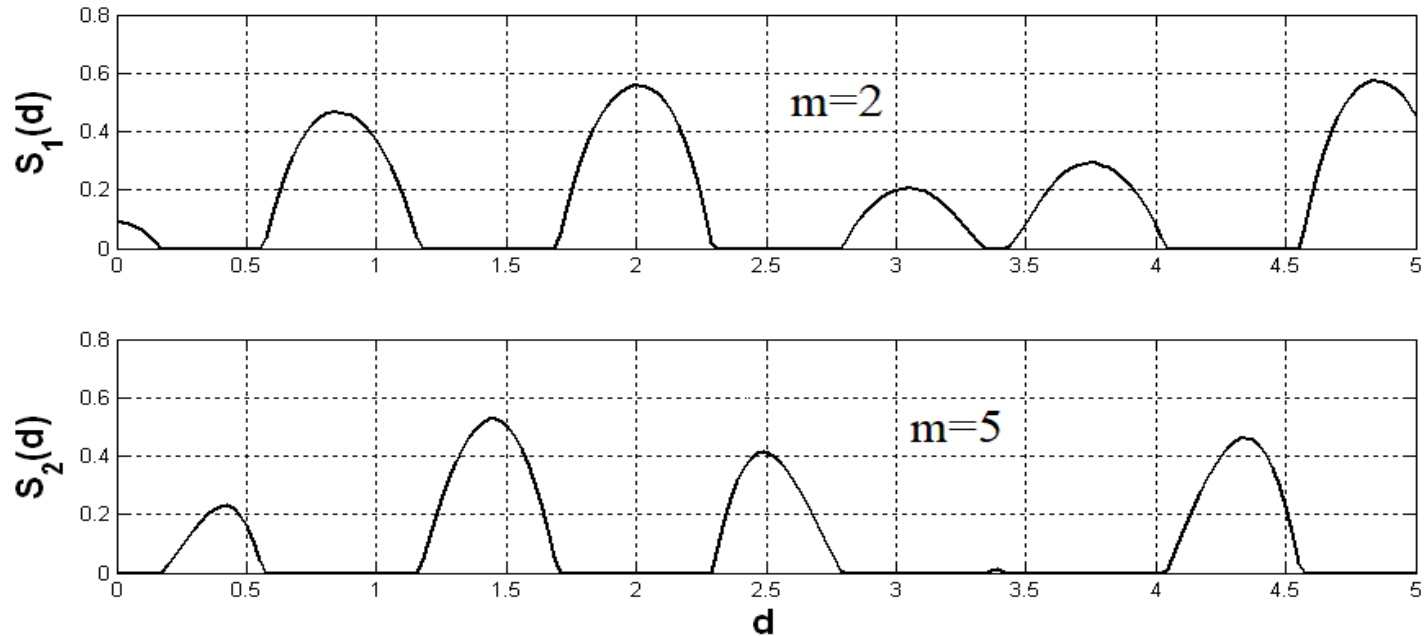


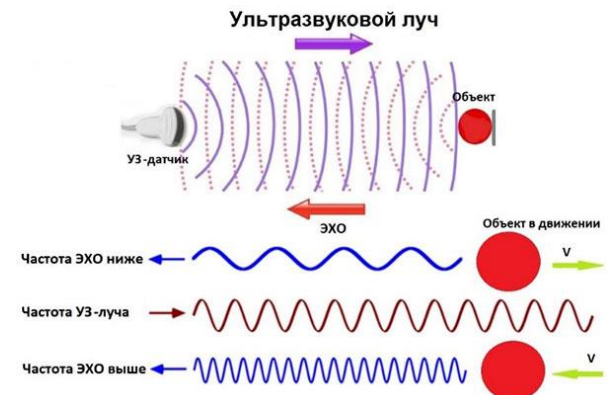
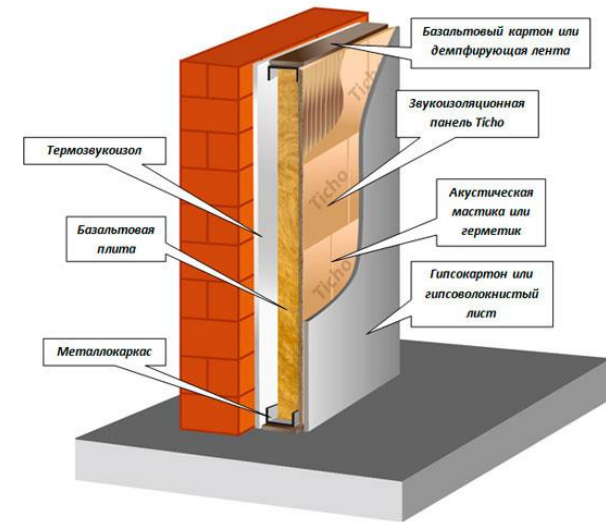
Рисунок 8 – Графики относительных отклонений коэффициентов прохождения для частиц с массами  $m = 2$  и  $m = 5$ .

Многослойные конструкции → **проблемы звукоизоляции** (важна для транспортных средств, механических устройств, помещений).

**Отражение акустических волн определенной частоты** – результат совместного действия нескольких слоев с разными физическими свойствами (ультразвуковые аппараты).

**Основные результаты** по многослойным системам получены с помощью физического моделирования, то есть с использованием **методов экспериментального анализа**.

Рассмотрим **новый подход**, который позволяет **аналитически оценить звукоизоляцию** в результате отражения звуковых волн определенной частоты от многослойной стены.





Газовая труба рассматривается как **трехслойная акустическая система**, для которой в каждом слое звуковая волна распространяется в радиальном направлении с разной скоростью.

Скорость распространения звуковых возмущений **в первом слое**  $0 < r < r_1$  равна скорости звука в транспортируемом газе  $c_1 \approx 330 \text{ m/s}$ .

**Второй слой**  $r_1 < r < r_2$ . Разница  $r_2 - r_1$  равна толщине газовой трубы, в которой звук распространяется со скоростью  $c_2 \approx 4300 \text{ m/s}$ .

**Третий слой**  $r_2 < r < \infty$ . В нем скорость звука  $c_3$  равна скорости звука в среде.

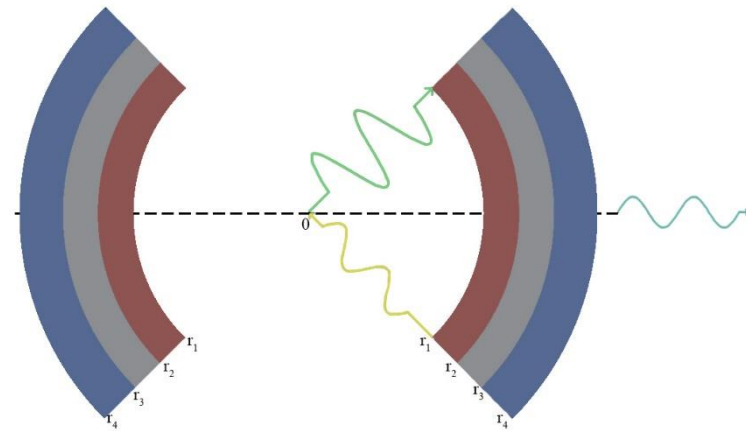


Рисунок 9 – Фрагмент трехслойного газопровода с падающими, отраженными и прошедшими волнами

В цилиндрической системе координат поле звукового давления  $p(r, t)$  описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (46)$$

$r$  - радиальная координата,  $t$  - время,  $c$  - скорость звука в слое.  
Решение уравнения (46) в виде монохроматической волны:

$$p(r, t) = e^{-i \omega t} P(r), \quad (47)$$

Для функции  $P(r)$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 P = 0. \quad (48)$$

Общее решение уравнения (48) выражается через **функцию Бесселя**  $J_0(\omega r/c)$  и **функция Неймана**  $Y_0(\omega r/c)$ :

$$P = a \cdot J_0(\omega r/c) + b \cdot Y_0(\omega r/c). \quad (49)$$

В задачах акустики удобнее использовать **сложные функции Ганкеля первого и второго рода**  $H_0^{(1)}(z)$  и  $H_0^{(2)}(z)$ , которые связаны с функциями Бесселя и Неймана соотношениями:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z); \quad H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z). \quad (50)$$

Формула (49) записывается как:

$$P = a \cdot H_0^{(1)}(kr) + b \cdot H_0^{(2)}(kr), \quad k = \frac{\omega}{c} - \text{волновое число}. \quad (51)$$

На больших расстояниях от оси трубы поведение функций Ганкеля таково, что выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= e^{-i\omega t} \cdot H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i\pi/4} e^{ik(r-t)} \\
 p_2 &= e^{-i\omega t} \cdot H_0^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i\pi/4} e^{-ik(r+t)}
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Функции Ганкеля первого рода описывают **волну давления**, движущуюся от центра к бесконечности, а функции Ганкеля второго рода, наоборот, описывают **волну, движущуюся из бесконечности к оси трубы**.

Запишем решение (51) отдельно для каждого акустического слоя:

$$\begin{aligned}
 P_3 &= D \cdot H_0^{(1)}(k_3 r), & r > r_2 \\
 P_2 &= A \cdot H_0^{(1)}(k_2 r) + B \cdot H_0^{(2)}(k_2 r), & r_1 < r < r_2 \\
 P_1 &= H_0^{(1)}(k_1 r) + C \cdot H_0^{(2)}(k_1 r) & 0 < r < r_1
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Волновые числа рассчитываются по формулам:

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad k_3 = \frac{\omega}{c_3}. \quad (54)$$

Все четыре коэффициента  $A, B, C, D$  в (53) могут быть определены из условий непрерывности и гладкости  $P(r)$ .

В математической записи условия «сшивания» следующие:

$$\begin{aligned} P_3(k_3 r_2) &= P_2(k_2 r_2) \\ \square & \quad \square \\ k_3 P_3(k_3 r_2) &= k_2 P_2(k_2 r_2) \\ P_2(k_2 r_1) &= P_1(k_1 r_1) \\ \square & \quad \square \\ k_2 P_2(k_2 r_1) &= k_1 P_1(k_1 r_1) \end{aligned} \quad (55)$$

Подставляя выражения (53) в (55), получаем систему для **определения коэффициентов  $A, B, C, D$** :

$$\begin{pmatrix} H_0^{(1)}(k_2 r_2) & H_0^{(2)}(k_2 r_2) & 0 & -H_0^{(1)}(k_3 r_2) \\ k_2 \dot{H}_0^{(1)}(k_2 r_2) & k_2 \dot{H}_0^{(2)}(k_2 r_2) & 0 & -k_3 \dot{H}_0^{(1)}(k_3 r_2) \\ H_0^{(1)}(k_2 r_1) & H_0^{(2)}(k_2 r_1) & -H_0^{(2)}(k_1 r_1) & 0 \\ k_2 \dot{H}_0^{(1)}(k_2 r_1) & k_2 \dot{H}_0^{(2)}(k_2 r_1) & -k_1 \dot{H}_0^{(2)}(k_1 r_1) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_0^{(1)}(k_1 r_1) \\ k_1 \dot{H}_0^{(1)}(k_1 r_1) \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Обычно стенка газопровода имеет как внутренний, так и внешний изоляционные слои. В этом случае исходная акустическая система будет пятиуровневой.

Обычно стенка газопровода имеет как внутренний, так и внешний изоляционные слои, тогда исходная акустическая система будет пятиуровневой:

$$\begin{aligned}
 P_5 &= DH_0^{(1)}(k_5 r), r > r_4, \\
 P_4 &= A_3 H_0^{(1)}(k_4 r) + B_3 H_0^{(2)}(k_4 r), r_3 < r < r_4, \\
 P_3 &= A_2 H_0^{(1)}(k_3 r) + B_2 H_0^{(2)}(k_3 r), r_2 < r < r_3, \\
 P_2 &= A_1 H_0^{(1)}(k_2 r) + B_1 H_0^{(2)}(k_2 r), r_1 < r < r_2, \\
 P_1 &= H_0^{(1)}(k_1 r) + CH_0^{(2)}(k_1 r), 0 < r < r_1.
 \end{aligned} \tag{57}$$

Внутренних слоев – три.

Коэффициенты  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  - определяют расширение раствора в каждом из внутренних слоев.

$C$  и  $D$  определяют отражательную способность всей акустической системы и ее проницаемость.

# Результаты расчетов

Схема фрагмента трехслойной трубы газопровода с падающей, отраженной и прошедшей волнами представлена на рисунке 9. При этом **синяя волна проходит**, **желтая отражается**, а **зеленая - исходящий**.

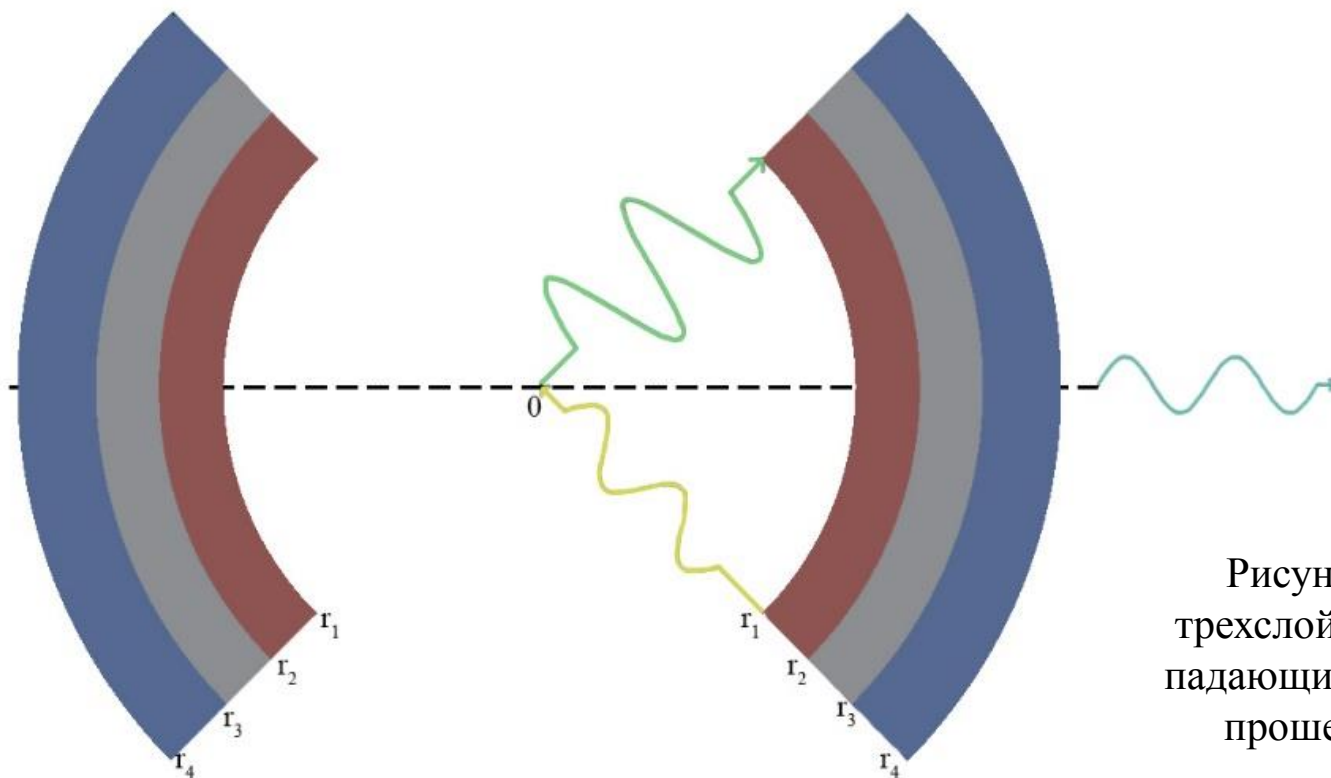


Рисунок 9 – Фрагмент трехслойного газопровода с падающими, отраженными и прошедшими волнами



# Результаты расчетов

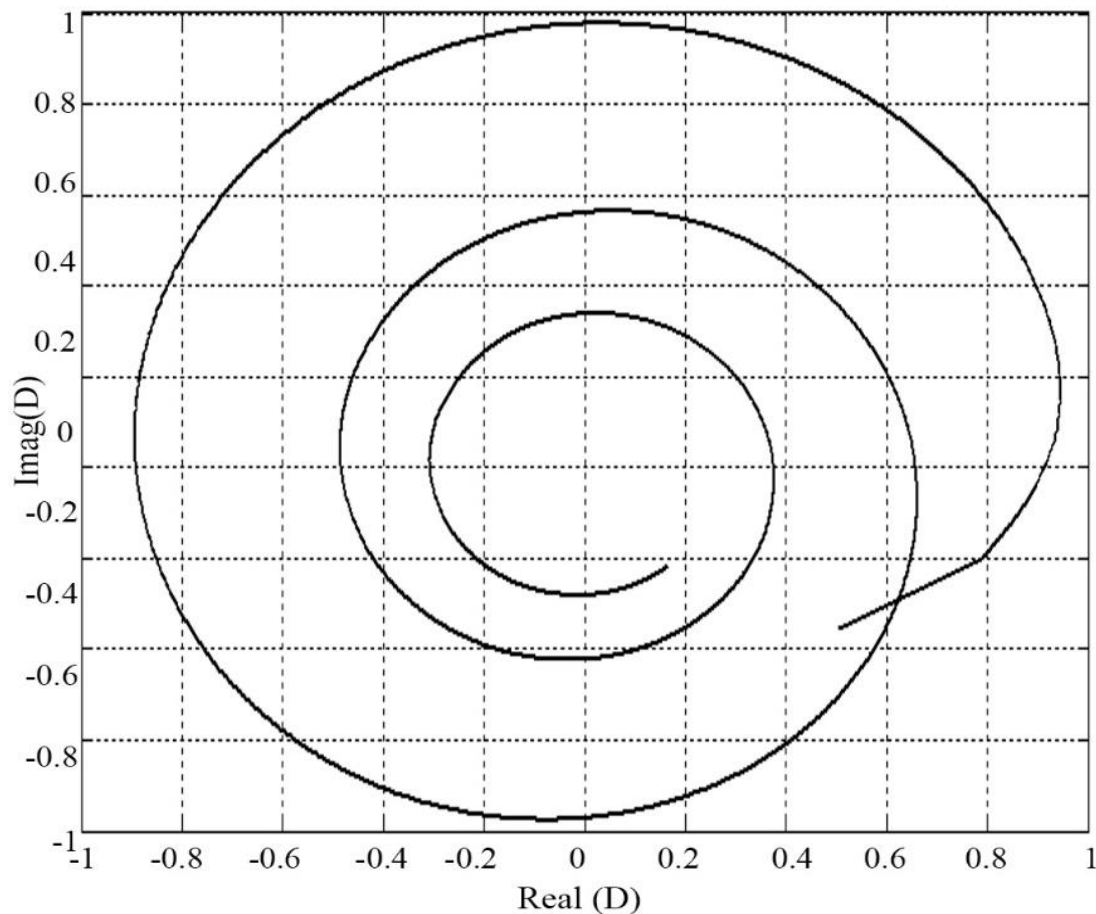


Рисунок 10 - График  
коэффициента прохождения  
 $D(\omega)$  по расчетным  
параметрам:

$$r_1 = 0.47 \text{ m}; r_2 = 0.50 \text{ m};$$

$$c_1 = 330 \text{ m/s}; c_2 = 4300 \text{ m/s};$$

$$c_3 = 400 \text{ m/s};$$

$$\omega = 2\pi f; 1 < f < 15000 \text{ Hz}.$$

# Результаты расчетов

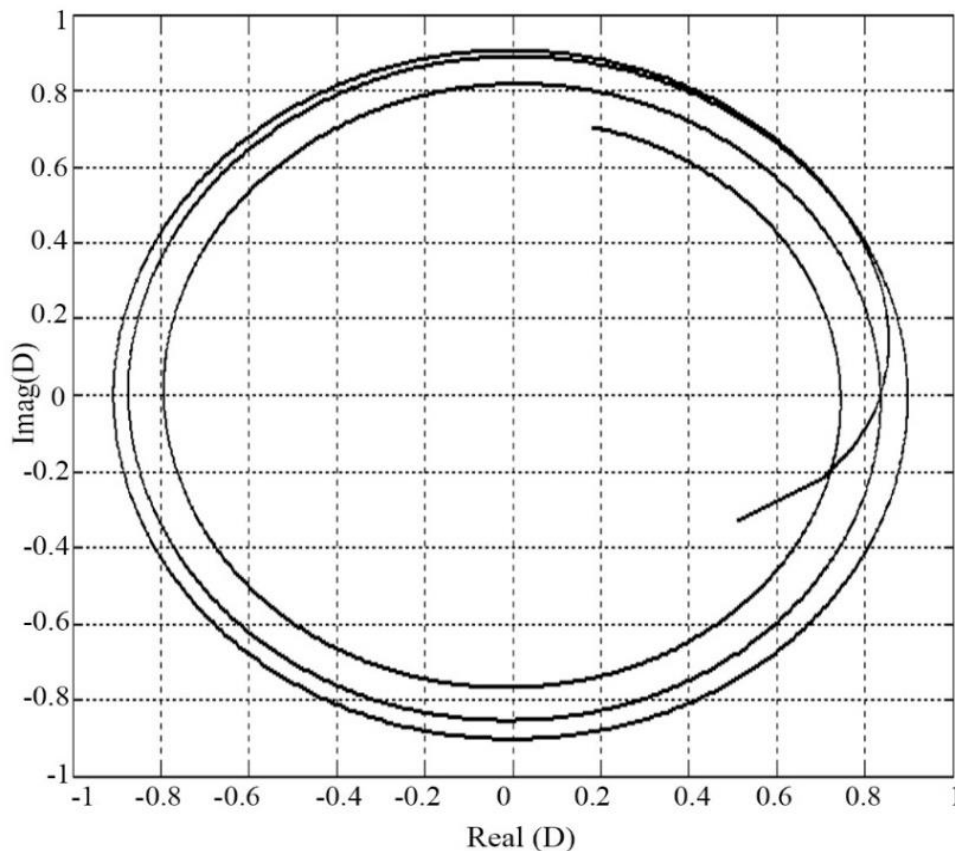


Рисунок 11 - График коэффициента прохождения  $D(\omega)$  по расчетным параметрам:

$$r_1 = 0.46 \text{ m}; r_2 = 0.50 \text{ m};$$

$$c_1 = 330 \text{ m/s}; c_2 = 4300 \text{ m/s}; c_3 = 1200 \text{ m/s};$$

$$\omega = 2\pi f; 1 < f < 5000 \text{ Hz}.$$

Увеличение частоты звуковых колебаний приводит к уменьшению передачи звуковых волн через систему: труба-воздух по сравнению со случаем, когда труба находится в водной среде.

# Результаты расчетов

В качестве примера расчета  $A, B, C, D$ , представим результат, полученный при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.47 \text{ m}; \quad r_2 = 0.50 \text{ m}; \quad c_1 = 330 \text{ m/s}; \quad c_2 = 4300 \text{ m/s}; \\ c_3 &= 330 \text{ m/s}; \quad f = 10 \text{ Hz}; \end{aligned} \quad (58)$$

Полученные коэффициенты пересчета:  $A = 1.172 + 0.91i$   $B = 0.073 + 1.118i$   
 $C = -0.087 + 0.21i$   $D = 0.84 - 0.161i$ .

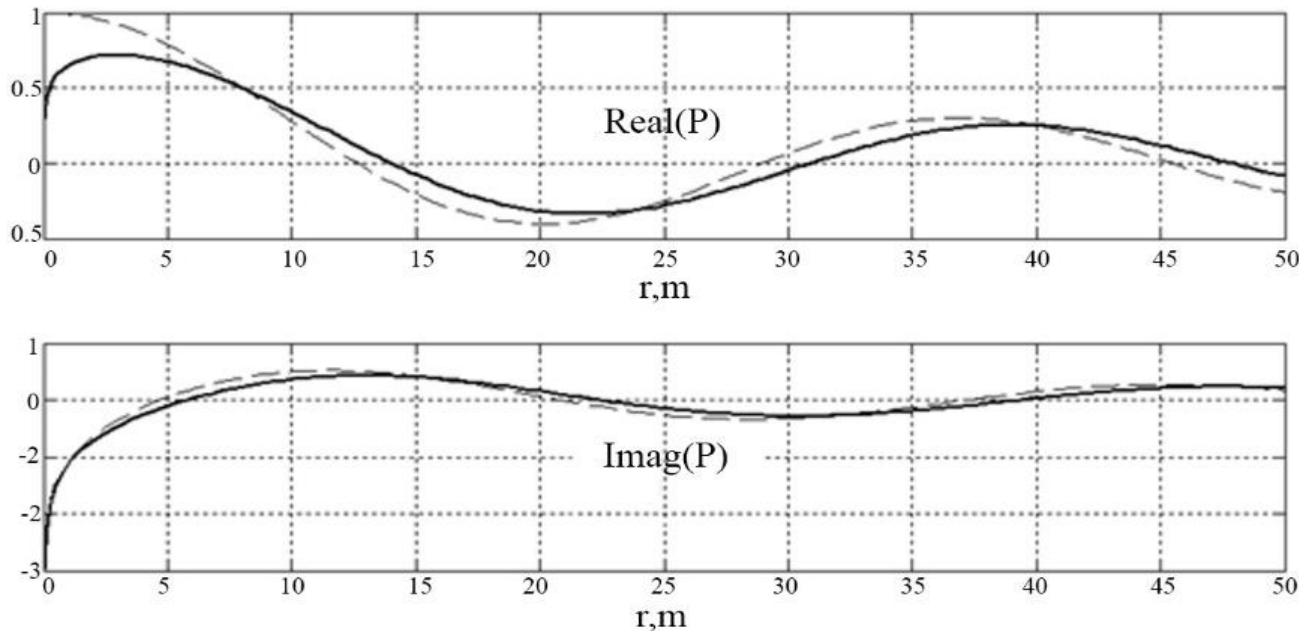


Рисунок 12 -  
Зависимость  
действительной и  
мнимой частей поля  
звукового давления  
от расстояния до оси  
трубы, для варианта  
исходных данных  
(58).

# Результаты расчетов

При погружении газовой трубы в воду, где  $c_3 \approx 1240 \text{ m/s}$ .

Расчет производился с исходными данными:

$$\begin{aligned} r_1 = 0.47 \text{ m}; \quad r_2 = 0.50 \text{ m}; \quad c_1 = 330 \text{ m/s}; \quad c_2 = 4300 \text{ m/s}; \\ c_3 = 1240 \text{ m/s}; \quad f = 10 \text{ Hz}. \end{aligned} \quad (59)$$

Полученные коэффициенты пересчета:  $A = 0.946 + 0.991i$   $B = -0.246 + 0.923i$   
 $C = -0.177 + 0.062i$   $D = 0.808 - 0.046i$ .

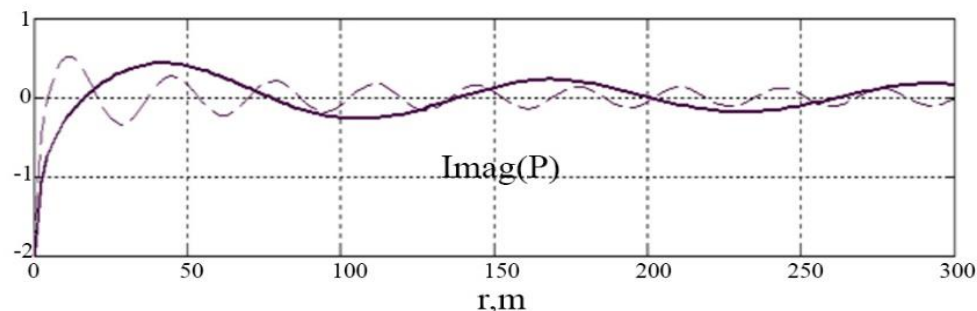
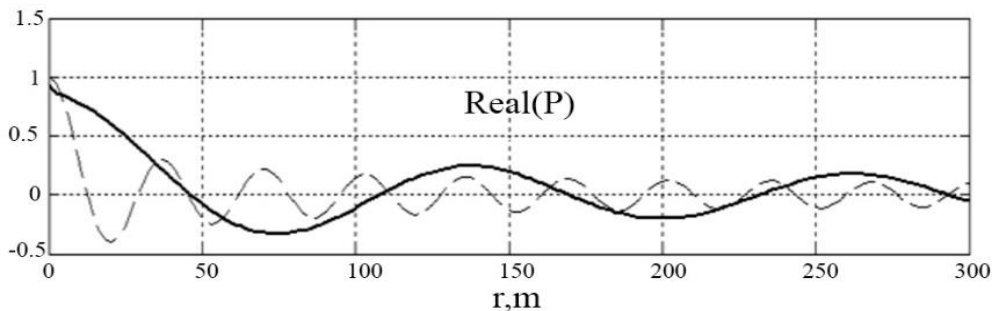


Рисунок 13 - Акустическое давление вне погруженной газовой трубы

На этом рисунке также показана контрольная кривая (пунктирная линия), показывающая звуковое давление в однородной цилиндрической волне

# Физические коэффициенты прохождения и отражения

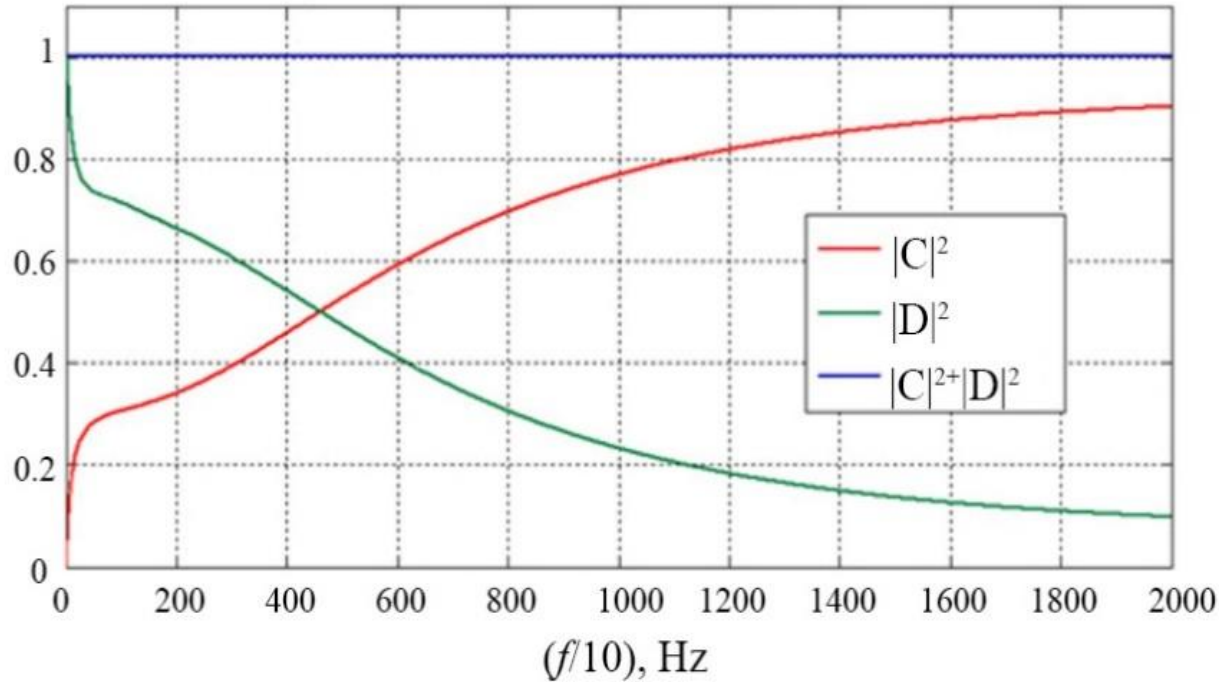


Рисунок 14 - Скалярные коэффициенты отражения  $R = |C|^2$  и прохождения  $S = |D|^2$  в зависимости от частоты колебаний монохроматической волны. Результаты были получены с:  $r_1 = 0.48 \text{ m}$ ;  $r_2 = 0.52 \text{ m}$ ;  $c_1 = 330 \text{ m/s}$ ;  $c_2 = 4300 \text{ m/s}$ ;  $c_3 = 1200 \text{ m/s}$ ;  $f = \omega/(2\pi)$ ;  $1 < f < 20000 \text{ Hz}$ .

# Физические коэффициенты прохождения и отражения

В работе [Horne, M.P.; Hansen, R.J. Sound propagation in a pipe containing a liquid of comparable acoustic impedance. J. Acoust. Soc. Am. 1982, 71, 1400–1405] представлены подробные измерения уровня звукового давления. Эксперименты проводились на установке, содержащей в качестве основного элемента вертикальную трубу диаметром 0,19 м и длиной 1,83 м, закрытую с обоих концов крышками. На нижней крышке внутри трубы находился источник звука, создающий звуковое давление 200 дБ на уровне 2,372 м; Для измерения давления по радиусу трубы был установлен горизонтально движущийся датчик. Измерения проводились на частотах от 50 до 1000 Гц. В расчетах воспроизводились те же физические условия. Данные измерений и расчета показали хорошее согласие (рис. 15).

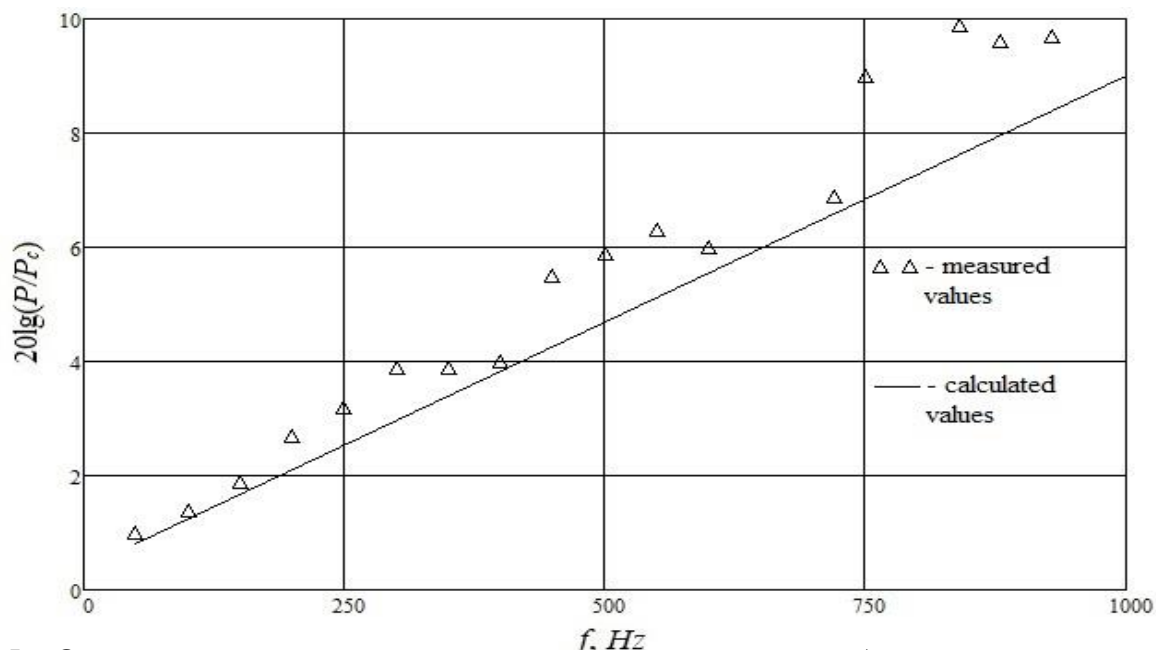


Рисунок 15 - Относительное давление на стенку акриловой трубы на разных частотах звуковой волны.

В рамках монохроматического приближения акустики

- построено аналитическое решение задачи о прохождении волн давления через трехслойную систему с цилиндрической симметрией,
- предложена схема «сшивки» аналитических распределений в акустических слоях, позволяющая определить характер отражения от каждой внутренней границы, границы раздела физических слоев.
- Предлагаемая схема приводит к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов представления решений. Найденные коэффициенты позволяют определить уменьшение амплитуды звуковых колебаний при прохождении через весь набор слоев.
- В результате расчетов найдены коэффициенты спектрального пропускания и отражения звуковых волн, генерируемых внутри трубы за счет турбулентности. Несмотря на то, что обычно металлическая трубка является резонатором, ее стенки могут отражать внутрь значительную часть звука.
- Для рассматриваемых геометрических размеров трубы найдены частотные интервалы, в которых преобладает тот или иной характер распространения звука.



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**