Алексей А. Тужилин

Действие группы подобия на семействе облаков собственного класса Громова-Хаусдорфа

Множества и собственные классы.

Теория множеств фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG).

Все объекты теории NBG называются классами. Имеется два типа классов:
– множество $\mathcal{A}$: существует класс $\mathcal{C}$ такой, что $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$;
– собственный класс $\mathcal{A}$: для любого класса $\mathcal{C}$ выполняется $\mathcal{A} \notin \mathcal{C}$.

Замечание. Каждый элемент класса является множеством;
$\mathcal{V} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} = \mathcal{A}\}$ – класс всех множеств, $\mathcal{V}$ – собственный класс.

Для любых классов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ определены $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, и т.д., в частности, мы можем говорить о функции расстояния на классах:

$\rho : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to [0, \infty]$ является расстоянием если

$\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$.
Если ρ удовлетворяет неравенству треугольника

$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$,

то ρ – обобщенная псевдометрика.
Обобщенная псевдометрика называется обобщенной метрикой, если условие $\rho(x, y) = 0$ эквивалентно $x = y$.
Если $\rho(x, y) < \infty$, то мы уберем слово “обобщенный”, а иногда мы даже будем добавлять слово “конечный”.

Для упрощения обозначений, мы будем писать $|x\,y|$ вместо $\rho(x, y)$.

Тем не менее, мы не можем определить топологию τ на собственном классе $\mathcal{A}$ обычным образом, так как, иначе, $\mathcal{A} \in \tau$, поэтому $\mathcal{A}$ – множество.

Чтобы обойти эту проблему, обозначим $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ класс всех тех элементов (множеств) класса $\mathcal{A}$, мощность которых не превосходит n. Получим “фильтрацию” $\mathcal{A}$:

$$\ldots \mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_n \ldots , \ldots m < n \ldots$$

Предположим, что каждое $\mathcal{A}_n$ – множество. Такое $\mathcal{A}$ назовем фильтрованным множествами.

Пусть $\mathcal{A}$ фильтровано множествами.
Определим топологию τ на $\mathcal{A}$ как отображение $\tau : \mathcal{A}_n \to \tau_n$, где τ_n – топология на $\mathcal{A}_n$ такая, что τ_m индуцирована из τ_n для всех $m < n$ (в этом случае будем говорить, что топологии τ_n согласованы).

Фильтрованный множествами класс $\mathcal{A}$ с топологией τ назовем топологическим классом.

Если ρ – обобщенная псевдометрика на классе $\mathcal{A}$, фильтрованном множествами, то ρ индуцирует соответствующую топологию τ_n на $\mathcal{A}_n$ для каждого n, и топологии τ_n с очевидностью согласованы. Мы назовем такое τ псевдометрической топологией.

Пусть X – множество, $\mathcal{A}$ – класс и $f\colon X \to \mathcal{A}$ отображение.

Утверждение. Образ $f(X)$ принадлежит некоторому $\mathcal{A}_n$.

Как следствие, для каждого топологического <u>пространства</u> X и любого топологического <u>класса</u> $\mathcal{A}$ определено понятие непрерывного отображения: $f\colon X \to \mathcal{A}$ – непрерывно, если отображение $f\colon X \to \mathcal{A}_n$ непрерывно для некоторого (и, значит, для любого) $\mathcal{A}_n \supset f(X)$.

В частности, для топологического класса мы можем говорить о непрерывных кривых и линейной связности. Если топология класса $\mathcal{A}$ порождена обобщенной псевдометрикой ρ, мы можем измерить длину $|\gamma|$ любой непрерывной кривой γ и определить понятие внутренней функции расстояния: обобщенную псевдометрику ρ назовем внутренней, если для любых $x, y \in \mathcal{A}$ выполняется

$$|xy| = \inf\{|\gamma| : \gamma \text{ соединяет } x \text{ и } y\}.$$

Пусть $\mathcal{VGH}$ обозначает класс всех метрических пространств, а $\mathcal{GH}$ – класс представителей всех классов изометрии метрических пространств. Так как на каждом множестве можно задать некоторую метрику (например, положив ее равной 1 между любыми двумя разными элементами), то оба класса $\mathcal{VGH}$ и $\mathcal{GH}$ – собственные.

Утверждение. Для любого кардинального числа n, класс $\mathcal{GH}_n$ – множество. Таким образом, класс $\mathcal{GH}$ фильтрован множествами.

Определим теперь функцию расстояния на $\mathcal{GH}$.

Расстояние Хаусдорфа.

Пусть X – метрическое пространство, $x \in X$, $A \subset X$ – непустое, $r > 0$, $s \geq 0$, тогда

$U_r(x) = \{z \in X : |xz| < r\}$ – открытый шар,
$B_s(x) = \{z \in X : |xz| \leq s\}$ – замкнутый шар,
$|xA| = |Ax| = \inf\{|xa| : a \in A\}$,
$U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\}$ – открытая r-окрестность A,
$B_s(A) = \{x \in X : |xA| \leq s\}$ – замкнутая r-окрестность A.

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \inf\{r : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\} = \\ &= \inf\{s : A \subset B_s(B) \text{ и } B \subset B_s(A)\} = \\ &= \max\{\sup\{|aB| : a \in A\}, \sup\{|Ab| : b \in B\}\} \end{aligned}$$

и назовем расстоянием Хаусдорфа между A и B.

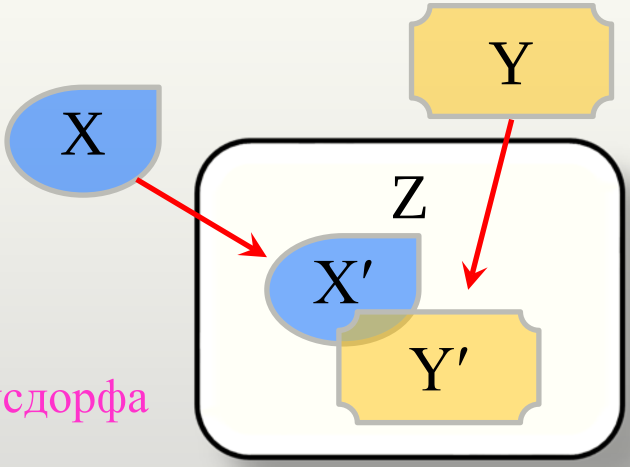
Предложение. Пусть $\mathcal{H}(X)$ – множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств $A \subset X$. Тогда d_H – метрика на $\mathcal{H}(X)$. Пространство $\mathcal{H}(X)$ – полное (вполне ограниченное, компактное), если и только если X такое же.

Расстояние Громова-Хаусдорфа.

Пусть X и Y – метрические пространства, тогда

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{r: d_H(X', Y') \le r;\ X', Y' \subset Z;\ Z \in \mathcal{GH};\ X \approx X';\ Y \approx Y'\},$$

где $U \approx V$ означает, что U изометрично V.



Очевидно,

$d_{GH}(X, X) = 0$ и $d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(Y, X)$,

поэтому

$d_{GH} : \mathcal{VGH} \times \mathcal{VGH} \to [0, \infty]$ – функция расстояния.

Величина $d_{GH}(X, Y)$ называется расстоянием Громова-Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y.

Теорема. Функция расстояния d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника, поэтому d_{GH} – обобщенная псевдометрика на $\mathcal{VGH}$.

Теорема. Если $X \approx Y$, то $d_{GH}(X, Y) = 0$, поэтому обобщенная псевдометрика d_{GH} на $\mathcal{GH}$ не зависит от выбора представителей из классов изометрии (приводит к изометричным классам).

Класс $\mathcal{GH}$, наделенный обобщенной псевдометрикой d_{GH} , будем называть классом Громова-Хаусдорфа.

В классе $\mathcal{GH}$ имеется несколько важных подклассов. Один из них состоит из всех ограниченных метрических пространств. Мы обозначим его $\mathcal{B}$ и будем называть его ограниченным классом Громова-Хаусдорфа. Отметим, что ограничение d_{GH} на $\mathcal{B}$ – конечная псевдометрика.

Другой важный класс состоит из компактных метрических пространств. Мы обозначим его $\mathcal{M}$. Отметим, что $\mathcal{M}$ – множество мощности континуум.

Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ – множество представителей классов изометрии компактных метрических пространств. Тогда
1) d_{GH} – метрика на $\mathcal{M}$;
2) пространство $\mathcal{M}$ – стягиваемое, линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое и не локально компактное.

Множество $\mathcal{M}$, наделенное метрикой d_{GH} , называется пространством Громова-Хаусдорфа.

Соответствия и расстояние Громова-Хаусдорфа.

Пусть X, Y – множества. Каждое $\sigma \subset X \times Y$ называется отношением между X и Y.

Отношение $R \subset X \times Y$ называется соответствием, если

$\forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y$, и $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ такие, что $(x, y) \in R$.

Обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$ множество всех соответствий между X и Y.

Для $X, Y \in \mathcal{GH}$ и непустого отношения $\sigma \subset X \times Y$ между X и Y величина

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup\bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x, y), (x', y') \in \sigma\bigr\}$$

называется искажением σ.

Теорема. Для любых метрических пространств X и Y выполняется

$$2\, d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\bigr\}.$$

Теорема (А.О.Иванов, ААТ). Расстояние Громова-Хаусдорфа является внутренним на $\mathcal{GH}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{M}$. На $\mathcal{M}$ оно даже строго внутреннее, т.е. каждая пара $X, Y \in \mathcal{M}$ соединяется в $\mathcal{M}$ кратчайшей кривой γ такой, что $|\gamma| = d_{GH}(X,Y)$.

Задача. Является ли расстояние Громова-Хаусдорфа на $\mathcal{B}$ и $\mathcal{GH}$ строго внутренним?

Пространства $\mathcal{GH}$ и $\mathcal{B}$ – полные.

Обобщенную псевдометрику на классе, собственном или нет, назовем полной, если каждая фундаментальная относительно нее последовательность сходится. М.Громов в “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces” анонсировал, что $\mathcal{GH}$ – полное пространство. Приведем доказательство.

Теорема (С.А.Богатый, ААТ). Классы $\mathcal{GH}$ и $\mathcal{B}$ – полные.

Доказательство. Пусть X_n – фундаментальная последовательность в $\mathcal{GH}$.
Без ограничения общности, будем считать, что $d_{GH}(X_n, X_{n+1}) < 1/2^n$ для всех n.

Для каждого n выберем соответствие $R_n \in \mathcal{R}(X_n, X_{n+1})$ такое, что $\operatorname{dis} R < 1/2^n$. Каждую последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которой $x_n \in X_n$ и $(x_n, x_{n+1}) \in R_n$ при всех n, назовем нитью.

Если $y = (y_1, y_2, \ldots)$ – еще одна нить, то последовательность чисел $(|x_1y_1|, |x_2y_2|, \ldots)$ фундаментальна, и ее предел назовем расстоянием между нитями x и y.

Легко показывается, что функция расстояния является псевдометрикой, а метрическое пространство, полученное факторизацией пространства нитей по отношению, отождествляющему нити на нулевом расстоянии, – пределом последовательности X_n. Доказательство закончено.

Простейшие свойства класса $\mathcal{GH}$.

Для метрического пространства X и вещественного числа $\lambda > 0$ обозначим λX метрическое пространство с тем же множеством X и с функцией расстояния $\lambda|xy|$ для каждых $x, y \in X$. Для $\lambda = 0$ и $\operatorname{diam} X < \infty$ положим λX равным одноточечному пространству Δ_1. Более общо, Δ_n будет обозначать n-точечное пространство, в котором все ненулевые расстояния равны 1.

Для метрического пространства X определим его диаметр, положив

$$\operatorname{diam} X = \sup\{|xy| : x, y \in X\}.$$

Теорема. Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется

1) $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;

2) если $\min\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\} < \infty$, то

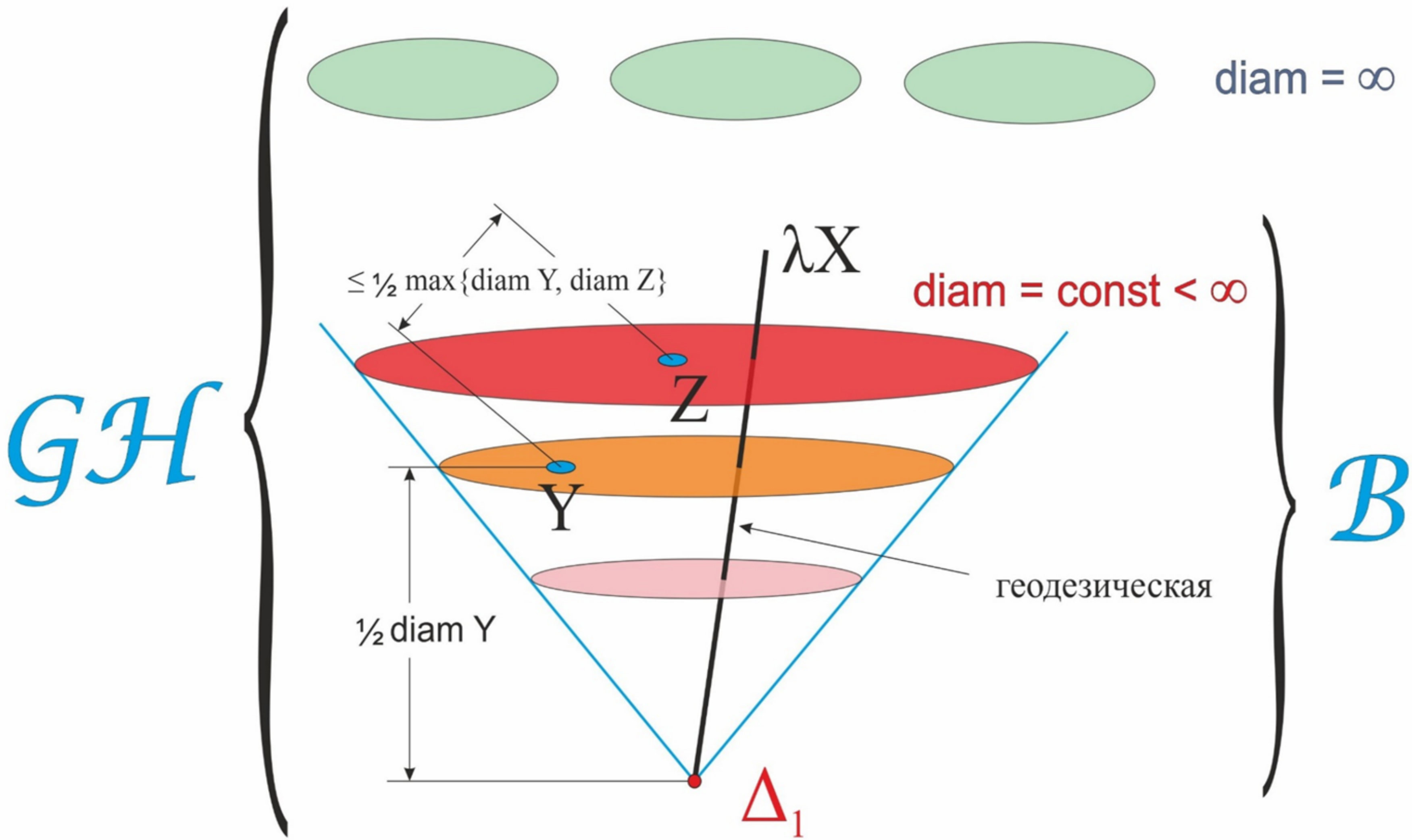
$$2d_{GH}(X, Y) \ge |\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y| \text{ (неравенство треугольника);}$$

3) $2d_{GH}(X, Y) \le \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$ (ультраметрическое неравенство);

4) если $X \in \mathcal{B}$, то для любых $\lambda, \mu > 0$ имеем

$$2d_{GH}(\lambda X, \mu X) = |\lambda - \mu| \operatorname{diam} X, \text{ т.е. } t \to t X \text{ – геодезическая;}$$

5) для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d_{GH}(X, Y)$, в частности, для $X \in \mathcal{B}$ отображение $X \to \lambda X$ – гомотетия с центром в Δ_1. Таким образом, $\mathcal{B}$ является конусом с вершиной в Δ_1, расслоенным на сферы $\operatorname{diam} = \mathrm{const}$ с центром в Δ_1.



$\mathcal{GH}$
diam = ∞
$\leq$ ½ max{diam Y, diam Z}
λX
diam = const < ∞
Z
Y
геодезическая
½ diam Y
Δ_1
$\mathcal{B}$

Геометрия облаков.

Рассмотрим отношение $\sim$ на $\mathcal{GH}$:

$$X \sim Y \text{ если и только если } d_{GH}(X, Y) < \infty.$$

Это отношения является эквивалентностью, и ее классы мы называем облаками. Каждое облако представляет собой максимальное псевдометрическое подпространство в $\mathcal{GH}$, а расстояние между любыми точками разных облаков бесконечно. Класс всех облаков обозначим $\mathcal{Clouds}$. Облако, содержащее метрическое пространство X, обозначим $[X]$.

Пример. Класс $\mathcal{B} \in \mathcal{Clouds}$ – облако, содержащее Δ_1, т.е. $\mathcal{B} = [\Delta_1]$.

Как устроены разные облака?

Утверждение. Одноточечное пространство Δ_1 – единственное пространство X в $\mathcal{B}$, для которого $\lambda X \approx X$ при всех $\lambda > 0$.

Утверждение. Для любого $\lambda > 0$ имеем $\lambda\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$.

Теорема. Если облако $\mathcal{C}$ содержит пространство X такое, что $\lambda X \approx X$ при всех $\lambda > 0$, то $d_{GH}(X, \lambda Y) \to 0$ при $\lambda \to 0+$ для всех $Y \in \mathcal{C}$, т.е. облако $\mathcal{C}$ стягивается на X при $\lambda \to 0+$.

Задача. Верно ли, что облако $\mathcal{B}$ изометрично облаку $[\mathbb{R}^n]$?

Задача. Существуют ли различные изометричные облака?

Заметим, что облако $\mathcal{C}$ из теоремы переходит в себя при всех отображениях $X \mapsto \lambda X$. М.Громов в “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces” анонсировал, что каждое облако в $\mathcal{GH}$ – стягиваемо и привел пример $[\mathbb{R}^n]$. Если бы все облака были инвариантными при умножении на все $\lambda > 0$, то утверждение Громова мгновенно вытекало из теоремы. Однако, не все облака инвариантны.

Пример (С.А.Богатый, ААТ). Пусть $p > 2$ – простое число, и

$$X = \{p, p^2, p^3, \ldots\}.$$

Тогда $d_{GH}(X, 2X) = \infty$, а $d_{GH}(X, p\,X) < \infty$.

Облако $\mathcal{C}$ назовем дождевым, если оно содержит X, для которого $\lambda X \notin \mathcal{C}$ при некотором $\lambda > 0$. Такие X мы назовем каплями.

Метрическое пространство X такое, что $\lambda X \approx X$ для всех $\lambda > 0$ назовем dil-инвариантным.

Теорема. Для каждого облака $\mathcal{C}$, если $X, Y \in \mathcal{C}$, $\lambda > 0$, и $\lambda X \in \mathcal{C}$, если и только если $\lambda Y \in \mathcal{C}$. В частности, все элементы каждого дождевого облака являются каплями, и дождевые облака не содержат dil-инвариантных метрических пространств.

Задача. Описать все dil-инвариантные метрические пространства.

Задача. Верно ли, что каждое не дождевое облако содержит dil-инвариантное метрическое пространство?

Отображение подобия.

Для $\lambda > 0$ отображение $X \mapsto \lambda X$ будем называть подобием. Будем рассматривать это отображение в трех разных смыслах.

(1) $\mathcal{GH} \to \mathcal{GH}$, т.е. классу изоморфизма пространства X ставим в соответствие класс изоморфизма пространства λX;

(2) $\mathcal{Clouds} \to \mathcal{Clouds}$, т.е. облаку $[X]$ ставим в соответствие облако $[\lambda X]$;

(3) если X – подмножество нормированного векторного пространства V, то можно рассматривать X как соответствующее подмножество в V. Таким образом, если $\mathcal{P}_0(V)$ – это множество всех непустых подмножеств V, то $\mathcal{P}_0(V) \to \mathcal{P}_0(V)$.

Приведенные выше примеры показывают, что подобие действует на классе $\mathcal{Clouds}$ нетривиальным образом.

Отображение подобия задает действие мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел.

Задача. Описать стабилизаторы этого действия.

Стационарные подгруппы отображения подобия.

Выше мы рассмотрели три типа действия: на $\mathcal{GH}$, на $\mathcal{Clouds}$ и на $\mathcal{P}_0(X)$.
Соответствующие стационарные подгруппы для метрического пространства X (соответственно, подмножества векторного пространства V) будем обозначать

$\mathrm{St}\,X$ (действие на $\mathcal{GH}$), $\mathrm{St}[X]$ (действие на $\mathcal{Clouds}$), $\mathrm{St}_V X$ (действие на $\mathcal{P}_0(V)$).

Предложение. Для любого $X \in \mathcal{GH}$ выполняется $\mathrm{St}[X] \supset \mathrm{St}\,X$.
Для любого нормированного пространства V и непустого $X \subset V$ имеем

$$\mathrm{St}[X] \supset \mathrm{St}\,X \supset \mathrm{St}_V X.$$

В частности, если $\mathrm{St}[X] = \mathrm{St}_V X$, то $\mathrm{St}[X] = \mathrm{St}\,X = \mathrm{St}_V X$.

Пример. (1) $X = \{3^p : p \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, тогда $\mathrm{St}[X] = \mathrm{St}\,X = \mathrm{St}_{\mathbb{R}} X = \{3^p : p \in \mathbb{Z}\}$.
(2) $X = \{3^p : p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, тогда $\{3^p : p \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{St}[X] \neq \mathrm{St}\,X = \mathrm{St}_{\mathbb{R}} X = \{1\}$.
(3) $X = \{3^p + 1 : p \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, тогда $\{3^p : p \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{St}[X] = \mathrm{St}\,X \neq \mathrm{St}_{\mathbb{R}} X$ ($3 \in \mathrm{St}\,X \setminus \mathrm{St}_{\mathbb{R}} X$).
(4) $X = 2^{1/2} + \mathbb{Q}$, тогда $\mathrm{St}[X] \neq \mathrm{St}\,X \neq \mathrm{St}_{\mathbb{R}} X \neq \mathrm{St}[X]$, так как

$$\mathrm{St}[X] = \mathbb{R}_+,\ \mathrm{St}\,X = \mathbb{Q},\ \mathrm{St}_{\mathbb{R}} X = \{1\}.$$

С помощью $\log$ получаем естественное соответствие между мультипликативными подгруппами $\mathbb{R}_+$ и аддитивными подгруппами $\mathbb{R}$.

Теорема. Каждая подгруппа в $\mathbb{R}_+$ – или $\{1\}$, или $G_p = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$, $p > 1$, или всюду плотна в $\mathbb{R}_+$.

Пример изучения стационарных подгрупп.

Следующие результаты были получены С.А.Богатым и ААТ. Положим $X_q = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Предложение. Для каждого $q > 1$ и $a > 0$ выполняется

$$St[aX_q] = St[X_q] \supset St_{\mathbb{R}}X_q = G_q = St_{\mathbb{R}}X_{aq}.$$

Пусть q_m обозначает максимальный корень уравнения $(q - 1)^{m+1} = q$.

Предложение. При $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, имеем $q_m > q_n > 2$.
Более того, $q_m < 2+1/m$, поэтому при $q_m \to 2$ при $m \to \infty$.

Теорема. Если $q > q_1$ или $q \in \mathbb{Q}$, то $St[X_q] = G_q = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\} = St\, X_q = St_{\mathbb{R}}X_q$.

Теорема. Если $q > q_m$, то $St[X_q] = G_p$, где $p = q^{1/k}$, $k \leq m$.

Теорема. Если $q > 1$, то $St[X_q] = G_p$, где $p = q^{1/k}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Предложение. Авторам неизвестны примеры, в которых $k > 1$.

Теорема. Если $q > 1$ и $\varphi(n) = n^2$, то $St[\{q^{\varphi(n)} : n \in \mathbb{Z}\}] = \{1\}$.

Задачи.

● Является ли класс *Clouds* множеством или собственным классом?

● Можно ли ввести на *Clouds* естественную топологию, которая превратит действие группы $\mathbb{R}_+$ в непрерывные кривые?

● Если рассматривать облака, отфакторизованные по нулевым расстояниям, как метрические классы, то между ними можно определить соответствия, искажения соответствий и расстояние Громова-Хаусдорфа. Выяснить, бывают ли разные облака, между которыми эти расстояния конечны.

● Завершить исследование стационарных подгрупп для облаков, содержащих возрастающие двусторонние прогрессии $X_q = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

● Найти асимптотические характеристики неограниченных монотонно возрастающих последовательностей, отвечающих за возвратное (невозвратное) поведение содержащих их облаков при действии группы подобия.

● Выяснить, существует ли подмножество прямой (метрическое пространство) такое, что содержащее его облако имеет всюду плотную в $\mathbb{R}_+$ стационарную подгруппу, не совпадающую со всем $\mathbb{R}_+$.

Дополнение.

Важный класс метрических пространств – пространства общего положения.

Пусть X – метрическое пространств, $\#X \ge 3$. Обозначим $S(X)$ множество всех биекций множества X на себя. Положим

$$s(X) = \inf\{|xx'| : x \ne x',\ x, x' \in X\},$$

$$t(X) = \inf\{|xx'| + |x'x''| - |xx''| : x \ne x' \ne x'' \ne x,\ x, x', x'' \in X\},$$

$$e(X) = \inf\{\operatorname{dis} f : f \in S(X),\ f \ne \mathrm{id}\}.$$

Пространство X назовем

вполне дискретным, если $s(X) > 0$;

вполне невырожденным, если $t(X) > 0$;

вполне несимметричным, если $e(X) > 0$;

пространством общего положения, если $s(X) > 0$, $t(X) > 0$ и $e(X) > 0$.

Пример (конечное пространство). Конечное пространство M любой мощности n: берем $\Delta_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и ко всем расстояниям $|ij|$ прибавляем разные ε_{ij}, $|\varepsilon_{ij}| < 1/3$. Тогда

$$s(M) > 2/3,\ t(M) > 0 \text{ и } e(M) > 0.$$

Существуют ли пространства общего положения любой мощности?

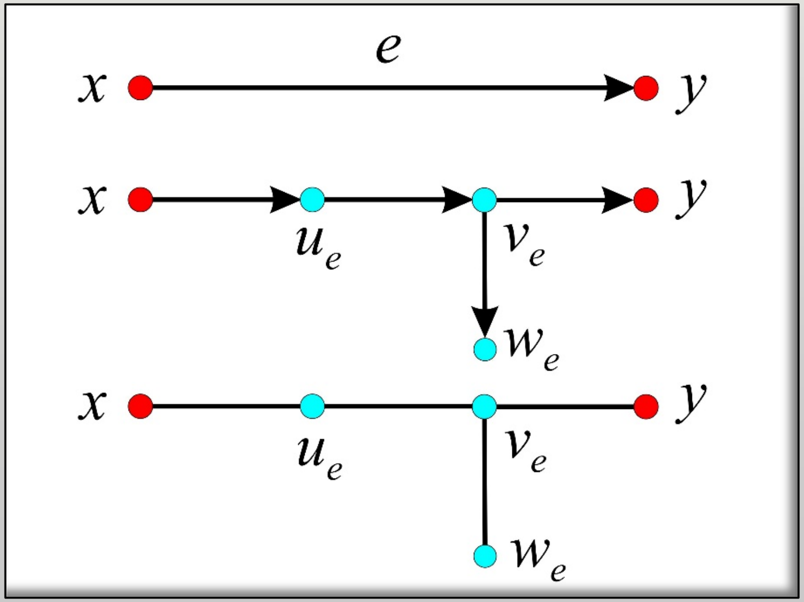
Ответ положительный. Конструкция была предложена Константином Шрамовым.

Пусть X – произвольное бесконечное множество. Хорошо известно, что каждое множество может быть вполне упорядочено, т.е. существует линейный порядок, в котором каждое подмножество содержит наименьший элемент. Введем на X какой-нибудь полный порядок $<$, тогда не существует биекций $X \to X$, отличных от тождественного отображения и сохраняющих этот порядок.

Линейный порядок $<$ на X можно задать в виде ориентированного графа G_o, в котором ребра – это все упорядоченные пары (x, y), где $x < y$. Из сказанного выше вытекает, что единственным автоморфизмом графа G_o является тождественное отображение. Построим теперь новый ориентированный граф H_o, заменив каждое ребро $e = (x, y)$ графа G_o на три вершины u_e, v_e, w_e и четыре ребра (x, u_e), (u_e, v_e), (v_e, y), (v_e, w_e).

Пусть H – соответствующий H_o неориентированный граф. Тогда у графа H не существует нетривиальных автоморфизмов.

Пусть V – множество вершин графа H. Зададим на V метрику, положив расстояние между разными несмежными вершинами равным 1, а между смежными равным V, где $1 + \varepsilon$. Тогда V – пространство общего положения, а мощности V и X равны.



Спасибо за внимание!