Задачи дифференциальной геометрии кривых и поверхностей в физике спиновых частиц

Д.С. Капарулин, С.Л. Ляхович

Томский государственный университет

11.12.2019

План

- Симметрия пространства и спин
- Классические точечные частицы со спином
- Обозначения и соглашения
- Часть 1. Спиновые частицы и поверхности в пространстве Минковского
    - Классические последствия условий неприводимости представления группы Пуанкаре
    - Мировой лист спиновой частицы
    - Мировые листы спиновых частиц в $d = 3$
- Часть 2. Цилиндрические кривые и пути спиновых частиц
    - Дифференциальная геометрия времени-подобных кривых
    - Кривые на круговом цилиндре в $d = 3$
    - Кривые на параболическом цилиндре в $d = 3$
    - Цилиндрические кривые в $d = 4$
- Заключение

Симметрия пространства и спин

• С точки зрения специальной теории относительности (СТО) фундаментальной считается динамическая система, на пространстве квантовых состояний которой действует унитарное неприводимое представление группы Пуанкаре.

• Генераторами представления группы Пуанкаре являются оператор импульса частицы $\hat{p}_a$ и оператор полного углового момента $\hat{J}_{ab}$, являющиеся элементами алгебры Ли группы Пуанкаре.

• Унитарные неприводимые представления классифицируются двумя параметрами: массой и спином, которые являются собственными значениями операторов Казимира в универсальной обертывающей алгебры Ли данного представления группы Пуанкаре (Вигнер,1939).

• Релятивистские волновые уравнения, описывающие движения фундаментальных полей, полностью определяются условиями неприводимости представления группы Пуанкаре (Баргманн и Вигнер, 1948).

Основной вопрос.

Какие уравнения движения имеет релятивистская частица, чье квантование соответствует унитарному неприводимому представлению группы Пуанкаре?

Классические точечные частицы со спином

• Классической релятивистской спиновой частицей называется точечная частица в пространстве Минковского, обладающая ненулевым собственным угловым моментом.

• Классическая релятивистская спиновая частица называется неприводимой, если её квантование приводит к теории на пространстве состояний которой действует унитарное неприводимое представление группы Пуанкаре.

• Метод ко-орбит Кириллова-Константа-Сурьё утверждает, что неприводимая релятивистская классическая спиновая частица есть динамическая система на ко-орбите группы Пуанкаре с некоторой массой и спином.

• Любые интегралы движения неприводимой частицы являются функциями импульса p и полного углового момента J, подчиненных условию массовой и спиновой оболочки.

Задача о динамике классической частицы со спином.

Получить уравнения движения классической неприводимой релятивистской спиновой частицы из непосредственно из условий неприводимости представления группы Пуанкаре?

Обозначения и соглашения

Рассматривается d-мерное пространство Минковского с глобальными координатами $x^a, a = 0, \ldots, d-1$. Всюду в настоящей презентации $d = 3$ или $d = 4$.

Метрика Минковского обозначена η_{ab}. Сигнатура метрики в основном положительная:

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \ldots - (dx^{d-1})^2 \,.$$

- Все тензорные индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского.
- Суммирование по повторяющемуся на разных уровнях индексу подразумевается.

Скалярное произведение двух векторов определяется с помощью метрики Минковского:

$$(u, v) = \eta_{ab} u^a v^b \,.$$

Векторное произведение в $d = 3$ определяется с помощью тензора Леви-Чивиты:

$$[u, v]_a = \varepsilon_{abc} u^b v^c \,, \qquad \varepsilon_{abc} = 1 \,.$$

Формула Лагранжа в $d = 3$:

$$[u, [v, w]] = w(u, v) - v(u, w) \,.$$

Часть 1. Спиновые частицы и поверхности

Теорема (Капарулин, Ляхович, 2017)

Пусть состояние некоторой квантовой релятивистской частицы в d-мерном пространстве Минковского описывается волновой функцией $\psi(x,z)$, зависящей от пространственно-временных координат x и некоторых дополнительных переменных z, и, при этом,

оператор импульса $\hat{p}_a$ генерирует трансляции в пространстве Минковского, а оператор полного углового момента $\hat{J}_{ab}$ – лоренцевы вращения:

$$\hat{p}_a x^b = i\delta_a{}^b\,, \qquad \hat{J}_{ab}x^c = i(\delta_b{}^c x_a - \delta_a{}^c x_b)\,;$$

операторы $\hat{p}_a, \hat{J}_{ab}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$[\hat{p}_a,\hat{p}_b] = 0\,, \qquad [\hat{p}_a,\hat{J}_{bc}] = i(\eta_{ac}\hat{p}_b - \eta_{ab}\hat{p}_c)\,,$$

$$[\hat{J}_{ab},\hat{J}_{cd}] = i(\eta_{ad}\hat{J}_{bc} - \eta_{ac}\hat{J}_{bd} + \eta_{bc}\hat{J}_{ad} - \eta_{bd}\hat{J}_{ac})\,.$$

Тогда оператор спинового углового момента $\hat{S} = \hat{J} - x\wedge\hat{p}$ является генератором представления группы Лоренца

$$\hat{S}_{ab}x^c = 0\,, \qquad [\hat{S}_{ab},\hat{p}_c] = 0\,,$$

$$[\hat{S}_{ab},\hat{S}_{cd}] = i(\eta_{ad}\hat{S}_{bc} - \eta_{ac}\hat{S}_{bd} + \eta_{bc}\hat{S}_{ad} - \eta_{bd}\hat{S}_{ac})\,.$$

Классические последствия условий неприводимости

Следствие

Каждый оператор Казимира $C^L(\hat{S})$ группы Лоренца коммутирует со всеми операторами представления:

$$[C^L(\hat{S}), \hat{S}_{ab}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [C^L(\hat{S}), f(\hat{p}, \hat{J})] = 0\,, \qquad \forall f.$$

В d-мерном пространстве Минковского группа Пункаре имеет $[(d+1)/2]$ операторов Казимира $C_k^P(\hat{p}, \hat{J})$, а группа Лоренца – $[d/2]$ операторов Казимира $C_l^L(\hat{S})$.

Для неприводимой спиновой частицы все операторы Казимира $C_k^P(\hat{p}, \hat{J}), C_l^L(\hat{S})$ должны быть кратны единичному (s_k, r_l – некоторые константы):

$$C_k^P(\hat{p}, \hat{J}) = s_k \hat{1}, \qquad C_l^L(\hat{S}) = r_l \hat{1}\,, \qquad k = 1, \ldots, [(d+1)/2]\,, \qquad l = 1, \ldots, [d/2]\,.$$

В классическом пределе единичный оператор соответствует единичной величине:

$$C_k^P(p, J) = s_k, \qquad C_l^L(S) = r_l\,.$$

- Первая группа соотношений фиксирует массу и спин частицы.
- Вторая группа равенств выражает дополнительные последствия неприводимости.

Мировой лист спиновой частицы

Определение

Поверхность в пространстве Минковского, зададанная системой уравнений

$$C_l^L(S) = r_l, \qquad S = J - x \wedge p\,, \qquad l = 1, \ldots, [d/2]\,. \tag{1}$$

называется мировым листом спиновой частицы.

• Соотношение (1) есть единственное ограничение на положения неприводимой частицы. Следовательно, мировой лист может пониматься как геометрическое место всех возможных классических положений релятивистской частицы со спином.

• Мировой лист является цилиндрической поверхностью $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$. Ось симметрии мирового листа совпадает с направлением импульса частицы p. Положение мирового листа в пространстве Минковского определяется значением полного углового момента J.

• При определенных условиях регулярности положение мирового листа в пространстве Минковского определяет состояние частицы. В этом случае пространство состояний частицы может быть реализовано в виде семейства поверхностей:

каждой частице сопоставляется мировой лист на котором она находится.

Мировые листы спиновых частиц в $d = 3$

В трехмерном пространстве Минковского условия неприводимости представления группы Пуанкаре, описывающего спиновую частицу имеют вид:

$$p^2 + m^2 = 0\,, \qquad (p, J) - ms = 0\,, \qquad S^2 + s^2 - r^2 = 0\,,$$

где $J_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J^{bc}, S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S^{ab}$ – векторы полного углового и спинового момента, m, s – масса и спин частицы, а $r \geq 0$ – акцессорный параметр.

• $m, s > 0$ (массивная частицы с ненулевым спином). Мировой лист является двухмерным круговым цилиндром радиуса r с времени-подобной осью:

$$(x - y)^2 + (n, x)^2 - r^2 = 0\,, \qquad (n, n) = -1\,, \qquad (n, y) = 0\,.$$

Параметры цилиндра n, y определяются значениями импульса и полного углового момента частицы:

$$n = \frac{p}{m}\,, \qquad y = \frac{1}{m^2}[p, J] \qquad \Leftrightarrow \qquad p = mn\,, \qquad J = m[y, n] - sn\,.$$

Геометрический смысл параметров цилиндра: n – касательный вектор к оси цилиндра, y – соединяет ось цилиндра и начало координат по кратчайшему пути.

Нюанс: Значения импульса p и $-p$ определяют один и тот же мировой лист. В дальнейшем предполагается $p^0 > 0$.

Мировые листы спиновых частиц в $d = 3$

• $m = 0, ms \to \sigma > 0$ (частица с непрерывной спиральностью). Мировой лист является двухмерным параболическим цилиндром с изотропной осью:

$$(p,x)^2 + 2(v,x) + a = 0\,, \qquad (p,p) = (p,v) = 0\,, \qquad (v,v) = \sigma^2\,.$$

Величины v, a определяются значениями импульса и полного углового момента частицы:

$$v = [p,J], \qquad a = J^2 - r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad J = \frac{[x,v]}{(x,p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2\sigma^2 - (x,v)^2}{(p,x)^2} - (p,x)^2 - 2(v,x) + r^2\right).$$

Параметры цилиндра – величины p, v, a.

Геометрический смысл параметров цилиндра:

p – касательный вектор к оси цилиндра, v – соединяет ось цилиндра и его поверхность по кратчайшему пути, – определяет положение цилиндра в пространстве.

Фокусное расстояние параболического цилиндра равно спину σ.

Нюанс: Значения импульса p и $-p$ определяют один и тот же мировой лист. В дальнейшем предполагается $p^0 > 0$.

• $m = 0, s = 0$ (безмассовая частица). Мировой лист – пара параллельных плоскостей. Размерность пространства мировых листов меньше размерности ко-орбиты группы Пуанкаре.

Часть 2. Цилиндрические кривые и пути частиц

Задача.

16. Доказать, что кривая лежит на сфере радиуса r в том и только том случае, если справедливо соотношение

$$r^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right).$$

Дубровин, Новиков, Фоменко, Современная геометрия, стр.60

Решение. Семейство сфер с радиусом r в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 - r^2 = 0\,.$$

Полагая параметр на кривой натуральным, $\dot{x}^2 = 1$, и, дифференцируя это соотношение три раза, получаем:

$$(\dot{x}, x - x_0) = 0\,, \qquad (\ddot{x}, x - x_0) + 1 = 0\,, \qquad (\dddot{x}, x - x_0) = 0\,.$$

Отсюда можно выразить координаты центра сферы r_0:

$$x_0 = x - \frac{[\dot{x}, \dddot{x}]}{(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})}\,.$$

Подставляя полученный результат в исходное уравнение получаем ответ задачи:

$$\frac{[\dot{x}, \dddot{x}]^2}{(\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})^2} - r^2 = 0\,.$$

Дифференциальная геометрия времени-подобных путей

Определение

Кривая $x(\tau)$ в пространстве Минковского называется времени-подобной, если $\dot{x}^2 < 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$.

Натуральный параметр на времени-подобной кривой определяется соотношением $\dot{x}^2 = -1$.

Тройка базисных векторов Френе в $d = 3$ вводится по правилу

$$e_1 = \dot{x}\,, \qquad e_2 = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x},\ddot{x})}}\,, \qquad e_3 = \frac{[\dot{x},\ddot{x}]}{\sqrt{(\ddot{x},\ddot{x})}}\,,$$

$$(e_1, e_1) = -(e_2, e_2) = -(e_3, e_3) = -1\,, \qquad (e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0\,.$$

Формулы Френе, адаптированные для описания времени-подобных кривых:

$$\dot{e}_1 = k e_2\,, \qquad \dot{e}_2 = k e_1 + \varkappa e_3\,, \qquad \dot{e}_3 = -\varkappa e_2\,,$$

$$k \equiv \sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}\,, \qquad \varkappa \equiv \frac{(\dot{x},[\ddot{x},\dddot{x}])}{(\ddot{x},\ddot{x})}\,,$$

где $k, \varkappa$ – кривизна и кручение.

Разложение для производных траектории по базису Френе:

$$\dot{x} = e_1\,, \qquad \ddot{x} = k e_2\,, \qquad \dddot{x} = \dot{k} e_2 + k(k e_1 + \varkappa e_3)\,,$$

$$\ddot{x} = 3k\dot{k}e_1 + (\ddot{k} + k^3 - k\varkappa^2)e_2 + (2\dot{k}\varkappa + k\dot{\varkappa})e_3\,.$$

Кривые на круговом цилиндре в $d=3$

Семейство поверхностей задано уравнением ($r>0$, т.к. прямые пути исключены)

$$(x-y)^2+(n,x)^2-r^2=0\,. \tag{2}$$

Параметры n,y семейства поверхностей подчинены соотношениям

$$(n,n)=-1\,,\qquad (n,y)=0\,.$$

Дифференциальные следствия уравнения семейства поверхностей до четвертого порядка:

$$\begin{gathered}(\dot x,d)=0,\qquad (\ddot x,d)+(n,\dot x)^2-1=0\,,\qquad (\dddot x,d)+3(n,\dot x)(n,\ddot x)=0\,,\\ (\ddddot x,d)+4(n,\dddot x)(n,\dot x)+3(n,\ddot x)^2+(\ddot x,\ddot x)=0\,,\qquad d=x-y+n(x,n)\,.\end{gathered} \tag{3}$$

• Уравнения (2), (3) определяют параметры цилиндра n,y в терминах производных траектории.

• Так как параметр y однозначно определяется d,n, то n,d может рассматриваться как альтернативный набор неизвестных в системе (2), (3).

Разложение неизвестных n,d по базису Френе ищем в виде

$$n=\beta_1 e_1-\beta_2(\alpha_2 e_2-\alpha_1 e_3)\,,\qquad d=r(\alpha_1 e_2+\alpha_2 e_3)\,,$$

где $\alpha_i,\beta_i,i=1,2$ – новые неизвестные.

Кривые на круговом цилиндре в $d = 3$

Система уравнений для определения неизвестных $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 = 0\,, \quad \beta_1^2 - \beta_2^2 - 1 = 0\,, \quad A\alpha_1 + \beta_2^2 = 0\,, \quad C\alpha_1 + B\alpha_2 + 3A\beta_2\beta_1\alpha_2 = 0\,,$$

$$E\alpha_1 + D\alpha_2 + 4(B\alpha_2 - C\alpha_1)\beta_1\beta_2 - A^2(3\beta_2^2\alpha_1^2 - 7\beta_2^2 - 3) = 0\,,$$

где A, B, C, D, E – функции радиуса цилиндра, кривизны и кручения кривой, а также их производных:

$$A = rk, \quad B = r^2\dot{k}\,, \quad C = r^2 k\varkappa\,, \quad D = r^3(2\dot{k}\varkappa + k\dot{\varkappa})\,, \quad E = r^3(\ddot{k} + k^3 - k\varkappa^2)\,.$$

Решение для $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ в терминах β_1 можно записать так:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \beta_1^2}{A}\,, \qquad \alpha_2 = \frac{\gamma}{DA}\,, \qquad \beta_2 = \frac{D(1 - \beta_1^2) - B\gamma}{3A\gamma\beta_1}\,,$$

$$\gamma = E - 3A(-1\beta_1^2)^3 + 7A^3(1 - \beta_1^2) + 3A^3\,.$$

Величина β_1 является общим положительным корнем двух многочленов:

$$P(\beta_1) = 81A^4\beta_1^{16} - 486A^4\beta_1^{14} + (-18A^2B^2 + 18A^2C^2 - 162A^6 + 1215A^4)\beta_1^{12} + \dots\,.$$

$$Q(\beta_1) = (-756A^6 + 108EA^3 + 5346A^4 + 288A^2B^2 - 288A^2C^2)\beta_1^{20} +$$

$$+(7236A^6 - 1080EA^3 + 2592A^2C^2 - 17820A^4 - 2592A^2B^2)\beta_1^{18} + \dots$$

Кривые на круговом цилиндре в $d = 3$

Необходимое условие существования общего корня у многочленов $P(\beta_1), Q(\beta_1)$ дает ограничение на производные кривой:

$$\Phi(A, B, C, D, E) = \mathrm{Res}_{\beta_1}(P(\beta_1), Q(\beta_1)) = 0\,. \tag{4}$$

• Уравнение (4) вовлекает все инварианты пути, зависящие от производных не выше четвертого порядка.

• Уравнение (4) описывает движение неприводимой спиновой частицы в пространстве Минковского.

Импульс и полный угловой момент частицы выражаются в терминах производных траектории:

$$p = m\left[\beta_1 \dot{x} - \frac{D(1-\beta_1^2) - B\gamma}{3A\gamma\beta_1}\left(\frac{\gamma}{DA}\frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x},\ddot{x})}} - \frac{1-\beta_1^2}{A}\frac{[\dot{x},\ddot{x}]}{\sqrt{(\ddot{x},\ddot{x})}}\right)\right],$$

$$J = [x - d, p] + \frac{s}{m}p\,, \qquad d = r\left(\frac{1-\beta_1^2}{A}\frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x},\ddot{x})}} + \frac{\gamma}{DA}\frac{[\dot{x},\ddot{x}]}{\sqrt{(\ddot{x},\ddot{x})}}\right),$$

где β_1 – общий корень многочленов $P(\beta_1)$, $Q(\beta_1)$.

• Импульс p и полный угловой момент J удовлетворяют уравнению ко-орбиты, как это и требуется для неприводимой спиновой частицы.

Вариационный принцип

Имеется возможность записать уравнения (4) в явном виде с использованием более широкого состава динамических переменных (рассматривается случай $r > s$, $\varrho = \sqrt{r^2 - s^2}$).

Вспомогательная переменная φ на окружности, поглощающая высшие производные пути, вводится по правилу

$$p = m\left[\frac{\dot{x}\left(1 - \frac{2s}{m}\frac{\dot{\varphi}}{(b,\dot{x})} - \frac{\varrho^2}{m^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{(b,\dot{x})^2}\right) + \dot{x}^2\left(\frac{s}{m}\frac{b\dot{\varphi}}{(b,\dot{x})^2} + \frac{\varrho^2}{m^2}\frac{b\dot{\varphi}^2}{(b,\dot{x})^3}\right)}{\sqrt{-\dot{x}^2\left(1 - \frac{2s}{m}\frac{\dot{\varphi}}{(b,\dot{x})} - \frac{\varrho^2}{m^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{(b,\dot{x})^2}\right)}} + \frac{\varrho}{m}\frac{[b,\dot{x}]}{(b,\dot{x})^2}\dot{\varphi}\right],$$

$$J = [x,p] - \varrho\frac{[b,\dot{x}]}{(b,\dot{x})} + s\frac{\frac{b}{(b,\dot{x})}}{\sqrt{-\frac{1}{\dot{x}^2}\left(1 - \frac{2s}{m}\frac{\dot{\varphi}}{(b,\dot{x})} - \frac{\varrho^2}{m^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{(b,\dot{x})^2}\right)}}, \qquad b(\varphi) = (1, -\sin\varphi, \cos\varphi)$$

Уравнения движения частицы:

$$\dot{p} = 0\,, \qquad \dot{J} = 0\,.$$

Функционал действия (Ляхович, Кузенко, Горбунов, 1996):

$$S[x(\tau),\varphi(\tau)] = \int\left(-m\sqrt{-\dot{x}^2\left(1 - \frac{2s}{m}\frac{\dot{\varphi}}{(b,\dot{x})} - \frac{\varrho^2}{m^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{(b,\dot{x})^2}\right)} - \varrho\frac{(\partial_\varphi b,\dot{x})}{(b,\dot{x})}\dot{\varphi}\right)d\tau\,.$$

Кривые на параболическом цилиндре в $d = 3$

Семейство поверхностей задано уравнением

$$(x,p)^2 + 2(x,v) + a = 0\,. \tag{5}$$

Параметры p, v, a семейства поверхностей подчинены соотношениям (σ – спиральность)

$$(p,p) = (p,v) = 0\,, \qquad (v,v) = \sigma^2\,.$$

Дифференциальные следствия уравнения семейства поверхностей до четвертого порядка:

$$\begin{gathered}(\dot{x},d) = 0, \qquad (\ddot{x},d) + (p,\dot{x})^2 - 1 = 0\,, \qquad (\dddot{x},d) + 3(p,\dot{x})(p,\ddot{x}) = 0\,, \\ (\ddddot{x},d) + 4(p,\dddot{x})(p,\dot{x}) + 3(p,\ddot{x})^2 = 0\,, \qquad d = v + p(x,p)\,. \end{gathered} \tag{6}$$

• Уравнения (5), (6) определяют параметры цилиндра p, v, a в терминах производных траектории.

• Так как параметр v однозначно определяется p, d, то p, d может рассматриваться как альтернативный набор неизвестных в системе (5), (6).

Разложение неизвестных p, d по базису Френе ищем в виде

$$p = \gamma(e_1 - \beta e_2 + \alpha e_3)\,, \qquad d = r\sigma(\alpha e_2 + \beta e_3)\,,$$

где α, β, γ – новые неизвестные.

Кривые на параболическом цилиндре в $d = 3$

Система уравнений для определения неизвестных α, β, γ:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0\,, \qquad A\alpha + \gamma^2 = 0\,, \quad C\alpha + B\beta + 3A\gamma^2\beta = 0\,,$$
$$E\alpha + D\beta + 4\gamma^2(B\beta - C\alpha) - A^2\beta^2\gamma^2 = 0\,, \tag{7}$$

где A, B, C, D, E – функции спиральности частицы, кривизны и кручения кривой, а также их производных:

$$A = \sigma k, \quad B = \sigma^2 \dot{k}\,, \quad C = \sigma^2 k\varkappa\,, \quad D = \sigma^3(2\dot{k}\varkappa + k\dot{\varkappa})\,, \quad E = \sigma^3(\ddot{k} + k^3 - k\varkappa^2)\,.$$

Решение для $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ в терминах β_1 можно записать так:

$$\alpha = -\frac{F}{GA}\,, \qquad \beta = \frac{F}{A(3AF - BG)}\,, \qquad \gamma = \sqrt{-\frac{F}{G}}\,.$$

• В отличие от кривых на круговом цилиндре, вспомогательный параметр γ удается выразить явно (хотя и выражение достаточно громоздкое, см. следующий слайд).

• В отличие от кривых на круговом цилиндре, условие совместности системы также удается выразить явно.

Функции F, G

$$F = -6BAC^4DE - 9BA^2C^2DE^2 + 54BA^5C^2DE - 9BA^2C^2D^3 + 81BA^6DE^2 - 1296BA^8C^2D-$$
$$-216BA^5C^2D^2 + 297BC^4DA^4 + 24BC^4D^2A + 17EB^2C^5 - 17B^3C^4D - 17BC^6D + 6AB^2E^2C^3+$$
$$+9A^2B^2E^3C - 9AB^4E^2C - 9C^3D^2B^2A + 12C^2D^2B^3A + 288B^4CA^4E - 144B^3C^2A^4E+$$
$$+27B^2CA^5E^2 + 864B^3C^2A^4D - 126B^2C^3A^4E + 17EB^4C^3 - 108B^3A^5E^2 - 24ACDB^4E+$$
$$+18AC^2DB^3E - 216B^2CA^5DE - 24AC^3DB^2E + 18A^2CD^2B^2E + 1728B^3C^2A^7 + 12AB^5E^2+$$
$$+16C^5DB^2 - 16EB^3C^4 - 9A^2B^3E^2D - 288B^2C^3A^4D + 51B^2C^5A^3 - 660B^3C^4A^3 + 576B^4C^3A^3-$$
$$-432B^2C^3A^7 - 768B^5C^2A^3,$$

$$G = 306C^5BA^4 - 3888A^9C^2D + 891A^5C^4D - 51AC^6D - 27A^3C^2D^3 - 648A^6C^2D^2 - 2592C^3BA^8+$$
$$+54A^3CD^2EB - 72A^2CDEB^3 - 648CBA^6DE - 27A^3DE^2B^2 + 2304B^3C^3A^4 + 102ABEC^5-$$
$$-324B^2A^6E^2 + 864CB^3A^5E - 756C^3BA^5E + 162A^6C^2DE - 18A^2C^4DE + 243A^7DE^2-$$
$$-27A^3C^2DE^2 + 162CBA^6E^2 + 36A^2B^4E^2 + 36A^2C^2D^2B^2 + 36A^2BE^2C^3 + 54A^3BE^3C-$$
$$-2196B^2C^4A^4 - 72E^2A^2B^2C^2 + 39B^2C^4AD - 144EA^2BC^3D - 144EAC^4B^2 + 48C^5ABD+$$
$$+72A^2C^4D^2 - 136B^4C^4 + 204EAB^3C^3 + 2592A^5B^2C^2D - 2304A^4B^4C^2 + 5184B^2C^2A^8-$$
$$-136B^2C^6 + 128B^3C^5 + 72A^2C^2DB^2E - 648B^2C^2A^5E - 36E^2B^3CA^2 - 36C^3D^2BA^2-$$
$$-1080C^3DBA^5\ .$$

Кривые на параболическом цилиндре в $d = 3$

Уравнение движения для кривых на параболическом цилиндре возникает как условие совместности уравнений (7) на параметры α, β, γ:

$$\Psi(A, B, C, D, E) = 0\,. \tag{8}$$

Оно вовлекает производные траектории до четвертого порядка. Конкретный вид функции Ψ приведен на следующем слайде.

Импульс и полный угловой момент частицы выражаются в терминах производных траектории до четвертого прядка:

$$p = \sqrt{-\frac{F}{G}}\left[\dot{x} - \frac{F}{A(3AF - BG)}\frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x}, \dddot{x})}} - \frac{F}{GA}\frac{[\dot{x}, \ddot{x}]}{\sqrt{(\ddot{x}, \dddot{x})}}\right],$$

$$J = \frac{[x, v]}{(p, x)} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2\sigma^2 - (x, v)^2}{(x, p)^2} - (x, p)^2 - 2(x, v) + r^2\right],$$

где вспомогательный вектор v определен соотношением:

$$v = \sigma\left[-\frac{F}{GA}\frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x}, \ddot{x})}} + \frac{F}{A(3AF - BG)}\frac{[\dot{x}, \ddot{x}]}{\sqrt{(\ddot{x}, \dddot{x})}}\right] - p(x, p)\,.$$

• Импульс p и полный угловой момент J удовлетворяют уравнению ко-орбиты, как это и требуется для неприводимой спиновой частицы.

Функция Ψ

$$\Psi(A,B,C,D,E) =$$

$$= -16C^3B^3E^2 - 1088C^4B^4A^2 + 153C^4A^6B^2 - 1368A^6C^3B^3 + 1024C^3B^5A^2 + 9E^2A^2C^2D^2+$$

$$+9E^4A^2B^2 - 810EA^7C^2B^2 - 108E^2A^4C^2B^2 + 6E^3AC^2B^2 + 32C^2B^4ED - 16CB^5E^2+$$

$$+17C^2B^4D^2 + 81E^2A^8B^2 + 54E^3A^5B^2 - 34CB^5DE - 68C^3B^3ED + 864C^3A^7BD+$$

$$+102C^4A^3B^2E - 102C^5A^3BD + 17C^4E^2B^2 + 17C^6D^2 - 24C^4D^3A + 34C^4B^2D^2 + 34C^2B^4E^2-$$

$$-16C^3B^3D^2 + 17B^6E^2 - 72E^2B^3A^4C + 216C^2D^3A^5 + 9C^2D^4A^2 + 1296C^2D^2A^8 + 252EBA^4C^3D+$$

$$+48EBAC^3D^2 - 24E^2B^2AC^2D + 144A^4C^2EB^2D - 54E^2BA^5CD - 54C^2D^2A^5E - 81D^2A^6E^2+$$

$$+1320C^4DA^3B^2 - 297C^4D^2A^4 - 18A^2CD^3BE + 9A^2D^2B^2E^2 - 558A^4CDB^3E - 30AC^2EB^2D^2+$$

$$+24ACE^2B^3D + 216A^5E^2B^2D - 1088C^2B^6A^2 - 24ADB^4E^2 + 48ACD^2B^3E - 1161A^4C^2B^2D^2-$$

$$-162A^4B^4E^2 + 6EAC^4D^2 - 12E^2AC^3BD - 18E^3A^2CBD + 32C^4B^2ED - 16C^5BD^2 + 408A^3CEB^5-$$

$$-24AC^2D^3B^2 + 1944A^3C^2DB^4 - 1296C^2A^10B^2 + 3024A^6C^2B^4 - 34C^5EBD + 216A^5CD^2BE-$$

$$-3672A^7C^2B^2D - 216EB^3A^7C + 12AC^3D^3B - 1254A^3C^3DB^3 + 360A^4C^3D^2B - 6AE^3B^4+$$

$$+102A^3C^2EB^4 - 504EB^3A^3C^3\,.$$

Цилиндрические кривые в $d=4$

В $d=4$ пространстве Минковского условия неприводимости группы Пуанкаре имеют вид

$$(p,p)+m^2=0\,,\quad (W,W)-m^2s^2=0\,,\quad S_{ab}S^{ab}-r_1=0\,,\quad \tfrac{1}{4}\varepsilon_{abcd}S^{ab}S^{cd}-r_2=0\,,$$

$$W_a=\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abcd}p^bJ^{cd}\,,$$

где m,s – масса и спин частицы, r_1,r_2 – акцессорные параметры, задающие значение функций Казимира группы Лоренца.

Мировой лист спиновой частицы определяется второй парой условий неприводимости:

$$S_{ab}S^{ab}-r_1=0\,,\quad \tfrac{1}{4}\varepsilon_{abcd}S^{ab}S^{cd}-r_2=0\,,\qquad S=J-x\wedge p\,.$$

• Первое из соотношений определяет квадрику той же сигнатуры, что и в $d=3$ (круговой или параболический гиперцилиндр).

• Второе из соотношений определяет гиперплоскость с вектором нормали W. Уравнение гиперплоскости: $\frac{1}{2}(x,W)-\frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}J^{ab}J^{cd}-r_2=0\,.$

• Пересечением этих гиперповерхностей является двухмерный круговой или параболический цилиндр с касательным вектором оси p.

• Движения частицы описываются системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений порядка четыре, одно из которых имеет то же вид, что и в $d=3$, а второе есть условие нулевого кручения:

$$[\dot{x},\ddot{x},\dddot{x},\ddddot{x}]=0\,.$$

Заключение

• Показано, что классические положения неприводимой спиновой частицы с необходимостью принадлежат некоторой цилиндрической поверхности (мировому листу), чья геометрия определяется представлением.

• Классифицированы мировые листы спиновых частиц в $d = 3, 4$ пространстве Минковского. Мировые листы массивных частиц со спином являются круговыми цилиндрами, частиц с непрерывной спиральностью – параболическими цилиндрами.

• С использованием методов дифференциальной геометрии кривых найдены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движение частицы по времени-подобному цилиндрическому пути в $d = 3, 4$.