Положительно градуированные алгебры Ли в геометрии, топологии и матфизике

Д.В. Миллионщиков

МГУ им. М.В. Ломоносова

конференция "Декабрьские чтения в Томске"

14 декабря 2018 г.

Естественно градуированные алгебры Ли

- Положительная градуировка алгебры Ли: примеры, определения
- Инвариантные комплексные структуры на нильмногообразиях
  интегрируемость $\to$ *быстрый рост*
- Характеристические алгебры Ли уравнения Клейна-Гордона
  интегрируемость $\to$ *медленный рост*

Определение

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется положительно градуированной ($\mathbb{N}$-градуированной), если она разложена в прямую сумму $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ своих однородных подпространств $\mathfrak{g}_i$ таких, что:

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, \ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Пример

$\mathfrak{g} = \mathcal{L}(m)$ – свободная алгебра Ли от m образующих $a_1, \dots, a_m$.
$\mathfrak{g}_k = \langle [a_{i_1}, [a_{i_2}, [\dots, \dots]], a_{i_k}] \rangle$ – линейная оболочка k-слов.

Пример

$\mathfrak{m}_0 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, \dots \rangle$ – задается бесконечным базисом и соотношениями: $[e_1, e_i] = e_{i+1}, i \geq 2, \ [e_i, e_k] = 0, \ i, k \neq 1$.
$(\mathfrak{m}_0)_k = \langle e_k \rangle, k = 1, 2, \dots$ – все одномерные подпространства.

Замечание

Положительно градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ может иметь другие (не эквивалентные) положительные градуировки.

Пример (естественная градуировка $\mathfrak{m}_0$)

$$(\mathfrak{m}_0)_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, (\mathfrak{m}_0)_2 = \langle e_3 \rangle, (\mathfrak{m}_0)_3 = \langle e_4 \rangle, (\mathfrak{m}_0)_4 = \langle e_5 \rangle, \dots$$

Определение

Градуировка $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ называется **естественной**, если

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Рассмотренная градуировка свободной алгебры Ли $\mathcal{L}(m)$ является естественной: вес (степень) однородного слова $[a_{i_1}, [a_{i_2}, [\dots, \dots]], a_{i_k}]$ равняется его длине k.

Естественная градуировка алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет важный **инвариантный смысл**.

Идеалы $\mathfrak{g}^m$ нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяемые рекуррентно

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{m+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m],$$

определяют убывающую фильтрацию алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для положительно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определена ассоциированная градуированная алгебра Ли

$$\mathrm{gr}\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}^i / \mathfrak{g}^{i+1}.$$

Утверждение

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является естественно градуируемой, тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{gr}\mathfrak{g}.$$

Рассмотренные $\mathcal{L}(m)$ и $\mathfrak{m}_0$ являются бесконечномерными алгебрами Ли, но у них конечномерные однородные подпространства $\mathfrak{g}_k$: $\dim \mathfrak{g}_k < +\infty$.

Определение (Зельманов, Шалев)

Положительно градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ назвается алгеброй ограниченной ширины, если $\exists C \geq 0$ такая, что $\dim \mathfrak{g}_i \leq C, \forall i \in \mathbb{N}$.

Определение

Шириной $d(\mathfrak{g})$ положительно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ ограниченной ширины называется **максимальная размерность** $d(\mathfrak{g}) = \max_{i \in \mathbb{N}} \dim \mathfrak{g}_i$ ее однородной компоненты.

Далее, как правило, мы будем рассматривать т.н. **узкие** (Зельманов, Шалев) **алгебры Ли**, т.е. положительно градуированные алгебры Ли ширины один и два.

Узкие алгебры Ли

Теорема (M. Vergne, 1970)

Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ *– естественно градуированная алгебра Ли такая, что:*

$$\dim \mathfrak{g}_1 = 2, \dim \mathfrak{g}_i = 1, \forall i \geq 2.$$

Тогда $\mathfrak{g}$ *изоморфна* $\mathfrak{m}_0$.

Примеры естественно градуированных алгебр Ли

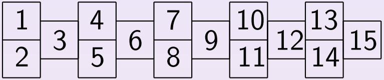
- $\mathfrak{n}_1$ (нильпотентная часть алгебры Каца-Муди $A_1^{(1)}$), две образующие e_1, e_2 и два соотношения

$$ad^3 e_1(e_2) = 0, \; ad^3 e_2(e_1) = 0;$$

- $\mathfrak{n}_2$ (нильпотентная часть алгебры Каца-Муди $A_2^{(2)}$), две образующие e_1, e_2 и два соотношения

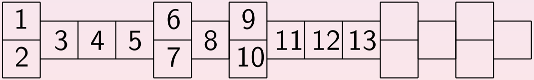
$$ad^5 e_1(e_2){=}0, \; ad^2 e_2(e_1){=}0.$$

Естественная градуировка алгебр $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$

$\mathfrak{n}_1$: 

$\dots$

$$\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & e_3 = [e_1, e_2] & \begin{array}{l} e_4 = [e_1, [e_1, e_2]] \\ e_5 = [e_2, [e_1, e_2]] \end{array} & \dots \\
1 & 2 & 3 & \dots
\end{array}$$

$\mathfrak{n}_2$: 

$\dots$

Центральные расширения $\mathfrak{m}_0^R$ алгебры Ли $\mathfrak{m}_0$

Пусть $r = 2k + 1 \geq 3$ нечетное число. Определим одномерное центральное расширение $\mathfrak{m}_0^r$ алгебры Ли $\mathfrak{m}_0$. Добавим еще одну образующую z_r, которая удовлетворяет соотношениям

$$[e_i, e_{2k+3-i}] = (-1)^i z_{2k+1}, i = 2, \dots, k+1, \ [z_{2k+1}, e_i] = 0, i = 1, 2.$$

По той же схеме можно построить центральное расширение $\mathfrak{m}_0^R$, отвечающее подмножеству $R \subset \{3, 5, 7, \dots\}$.

Естественно градуированные алгебры Ли ширины 3/2

Теорема (М., 2017, ДАН 2018, Мат. сб. 2019)

Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *– комплексная положительно градуированная алгебра Ли такая, что:*

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \; \dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leq 3, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ *изоморфна одной и только одной алгебре Ли из*

$$\mathfrak{m}_0, \mathfrak{n}_1, \; \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_2^3, \left\{\mathfrak{m}_0^R \mid R \subset \{3, 5, 7, 9, \dots\}\right\}.$$

Из определения **естественной градуировки** следует, что $\mathfrak{g}=\oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ порождена своей первой компонентой $\mathfrak{g}_1$, т.к.

$$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]=\mathfrak{g}_2,[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]=\mathfrak{g}_3,\dots$$

Для $n>1$ введем V_n – линейную оболочку всех коммутаторов $[[\dots[\dots],],\dots]$ элементов из $\mathfrak{g}_1$ длины не выше n с произвольной расстановкой скобок.

$$\mathfrak{g}_1=V_1\subset V_2\subset\dots\subset V_n\subset\dots,\ \cup_{i=1}^{+\infty}V_i=\mathfrak{g}.$$

Определим **функцию роста**

$$F_{\mathfrak{g}}^{gr}(n)=\dim V_n=\dim\mathfrak{g}_1+\dots+\dim\mathfrak{g}_n.$$

- самый быстрый рост – свободная алгебра Ли $\mathcal{L}(m)$.

$$F_{\mathcal{L}(m)}^{gr}(n)\sim\frac{1}{n}m^n$$

- самый медленный рост у $\mathfrak{m}_0$: это $F_{\mathfrak{m}_0}^{gr}(n)=n+1$.

Функции роста для $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$.

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_1$
$$F^{gr}_{\mathfrak{n}_1}(n) = \left[\frac{3n+1}{2}\right] \sim \frac{3n}{2}$$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_2$
$$F^{gr}_{\mathfrak{n}_2}(n) \sim \frac{4n}{3}$$

"Как изготовить нильпотентную алгебру Ли из бесконечномерной"

Утверждение

Конечномерная положительно градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ является нильпотентной.

В самом деле, в этом случае $\mathfrak{g}_i = 0$, начиная с некоторого N. Тогда выполнено для N-го идеала центрального ряда

$$\mathfrak{g}^N \subset \mathfrak{g}_N = 0.$$

Утверждение

Фактор-алгебра бесконечночномерной положительно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ по идеалу $\mathfrak{g} = \oplus_{i=k+1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ является конечномерной нильпотентной алгеброй Ли.

Алгебры Карно

Конечномерная естественно градуированная алгебра Ли называется в субримановой геометрии *алгеброй Карно*

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i, \ [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, i = 1, \ldots, n{-}1.$$

Определение

Многообразием Кодаиры-Тёрстона называется компактное фактор-пространство $KT = G/\Gamma$, где Γ – подгруппа матриц, у которых $z, v = a + ib, a, b \in \mathbb{Z}$. $(u, w, z, w \in \mathbb{C})$.

$$G : \begin{pmatrix} 1 & \bar{u} & w \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & v \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} + \bar{u} & v + \bar{u}z + w \\ 0 & 1 & z + u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = dz = d(z + u),$$
$$\omega_2 = dv - \bar{z}dz = d(v + \bar{u}z + w) - (\bar{z} + \bar{u})d(z + u),$$

образуют базис левоинваринатных $\Lambda^{1,0}$-форм на G.

$$d\omega_1 = 0, d\omega_2 = \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1.$$

Нильмногообразия

Определение

Нильмногообразие M – компактное однородное пространство вида $M = G/\Gamma$, где G является односвязной нильпотентной группой Ли. $\Gamma \subset G$ – кокомпактная решетка.

Пример

1) $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

2) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, t \in \mathbb{R}, \;\; \Gamma_3 = \{(\dots), x, y, t \in \mathbb{Z}\} \right\}$

$M^3 = H_3/\Gamma_3, \; KT = M^3 \times S^1.$

Конструкция А.И. Мальцева

Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с базисом $e_1, \dots, e_n$ и

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{Q},$$

Замечание

Векторное пространство $\mathfrak{g}$ имеет структуру группы Ли $\star$ (формула Кэмпбелла-Хаусдорфа):

$$x \star y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$$

так, что G является нильптентной группой Ли, $\Gamma \subset G$ – подгруппа, порожденная $e_1, e_2, \dots, e_n$.
G/Γ – компактное нильмногообразие

Почти комплексная структура $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, J^2 = -Id$ в касательной вещественной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется **интегрируемой**, если вырождается ее тензор Нийенхейса $N(J)$

$$[Jx, Jy] = [x, y] + J[Jx, y] + J[x, Jy], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

В этом случае, согласно теореме Ньюлендера-Ниренберга, **нильмногообразие G/Γ обладает комплексной структурой**.

Частные случаи

1) почти комплексная структура $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, J^2 = -Id$ определяет **комплексную структуру в вещественной алгебре Ли** $\mathfrak{g}$, если

$$[Jx, y] = J[x, y], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

2) почти комплексная структура называется **абелевой**, если

$$[Jx, Jy] = [x, y], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Легко видеть, что оба этих случая являются интегрируемыми

Продолжая J на комплексификацию $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, мы получим

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-i} \oplus \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{i},$$

где $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\pm i} = \{x - \pm iJx : x \in \mathfrak{g}\}$ обозначают собственные подпространства комплексификации J

Утверждение

J интегрируема iff $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\pm i}$ являются подалгебрами в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$;

Наши частные случаи:
1) собственные подпространства $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\pm i}$ оператора J являются идеалами в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
2) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\pm i}$ являются абелевыми подалгебрами в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Наличие интегрируемой комплексной структуры накладывает серьезные ограничения на алгебру Ли $\mathfrak{g}$, в частности Goze и Remm показали в 2002 г., если ассоциированная градуированная алгебра Ли $\mathrm{gr}\mathfrak{g}$ является **самой узкой** (такая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется **филиформной** или максимального класса), то **интегрируемой комплексной структуры J не существует**.

Замечание

Если нильмногообразие M получено из комплексной группы Ли, то $b_1(M) \geq 4$,
Если нильмногообразие M отвечает алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с абелевой комплексной структурой, то $b_1(M) \geq 3$.

Нас будут интересовать нильмногообразия с $b_1(M) = 2$.

Теорема (M., Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 2016)

Пусть нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ размерности $\dim \mathfrak{g} \geq 6$, обладает интегрируемой комплексной структурой J, тогда для размерностей однородных компонент ее ассоциированной градуированной алгебры Ли $\mathrm{gr}\mathfrak{g}$ верна следующая оценка

$$F_{\mathrm{gr}\mathfrak{g}}(3) = \dim(\mathrm{gr}\mathfrak{g})_1 + \dim(\mathrm{gr}\mathfrak{g})_2 + \dim(\mathrm{gr}\mathfrak{g})_3 \geq 5.$$

Удается добавить еще одну оценку для алгебр Ли достаточно большой размерности

$$F_{\mathrm{gr}\mathfrak{g}}(5) \geq 8.$$

Гипотеза: если нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает интегрируемой комплексной структурой, то $\mathrm{gr}\mathfrak{g}$ должна "расти не медленнее, чем $\mathfrak{n}_1$."

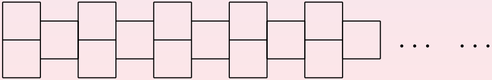
Две вещественные формы алгебры $\mathfrak{n}_1$

Две вещественные формы $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}(1,2)$ для $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ задаются базисом u, v, w и соотношениями

$$[u,v]{=}w,\ [v,w]{=}\pm u,\ [w,u]{=}v.$$

Рассмотрим две подалгебры $\mathfrak{n}_1^{\pm}$ в алгебре петель $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}[t]$ и $\mathfrak{so}(1,2)\otimes\mathbb{R}[t]$ соответственно. Они задаются линейными базисами вида

$$\begin{matrix} u\otimes t^1 \\ v\otimes t^1 \end{matrix}, w\otimes t^2, \begin{matrix} u\otimes t^3 \\ v\otimes t^3 \end{matrix}, w\otimes t^4, \begin{matrix} u\otimes t^5 \\ v\otimes t^5 \end{matrix}, w\otimes t^6, \dots$$



Комплексная структура J на $\mathfrak{n}^+$

Определим почти комплексную структуру J на бесконечномерной $\mathfrak{n}^+$

$$J(v \otimes t^{2l+1}) = u \otimes t^{2l+1}, \; J(w \otimes t^{4k+2}) = w \otimes t^{4k+4}.$$

Доказательство ее интегируемости (т.е. $N(J) = 0$) состоит в прямой проверке равенства на базисных элементах.

С помощью J легко определяется интегрируемая комплексная структура на четномерных факторах алгебры Ли $\mathfrak{n}^+$.

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона

$$u_{tt} - u_{zz} = f(u).$$

В характеристических переменных $x = \frac{z+t}{2}, y = \frac{z-t}{2}$ оно запишется как

$$u_{xy} = f(u). \tag{1}$$

Определение

Функция $F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots)$ называется x-интегралом уравнения Клейна-Гордона $u_{xy} = f(u)$, если $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

$w_2 = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2$ является x-интегралом уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$. В самом деле

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = u_{xyx} - u_x u_{xy} = (e^u)_x - e^u u_x = 0.$$

Представим $F(u, u_x, u_{xx}, \dots) = F(u, u_1, u_2, \dots)$, где $u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, u_3 = u_{xxx}, \dots$
Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} F(u, u_x, u_{xx}, \dots) &= u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_1} + u_{xxy} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots \\ &= u_y \frac{\partial F}{\partial u} + f \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots\end{aligned}$$

Лемма

F является x-интегралом тогда и только тогда, когда

$$X_0(F) = \frac{\partial F}{\partial u} = 0, X_1(F) = f \frac{\partial F}{\partial u_1} + D_x(f) \frac{\partial F}{\partial u_2} + D_x^2(f) \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots$$

Другими словами, функция F аннулируется векторными полями X_0 и X_1.

Оператор $D = D_x$ полной производной относительно x

$$D_x g(u, u_x, u_{xx}, \dots) = u_x \frac{\partial g}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial g}{\partial u_1} + u_{xxx} \frac{\partial g}{\partial u_2} + \dots =$$
$$= u_1 \frac{\partial g}{\partial u} + u_2 \frac{\partial g}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial g}{\partial u_2} + \dots$$

$$D = D_x = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial}{\partial u_n} + \dots,$$

Для функции $f(u)$

$$Df = f_u u_x = f_u u_1, \quad D^2(f) = f_{uu} u_x^2 + f_u u_{xx} = f_{uu} u_1^2 + f_u u_2$$

Характеристическая алгебра Ли уравнения Клейна-Гордона

Рассмотрим коммутатор

$$[X_0, X_1] = [\frac{\partial}{\partial u}, X_1] = f_u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f_u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}(f_u)\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots$$

Пример. Уравнение Лиувилля $f(u) = e^u$

$$[X_0, X_1] = X_1.$$

линейная оболочка $\langle X_0, X_1, [X_0, X_1] \rangle$ в этом случае двумерна.

Определение

Алгебра Ли $\chi(f)$, порожденная двумя операторами X_0, X_1 называется характеристической алгеброй Ли уравнения Клейна-Гордона $u_{xy} = f(u)$.

Уравнение sinh-Гордон $u_{xy} = \sinh u$

Характеристическая алгебра Ли $\chi(\sinh u)$ порождена

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, X_1 = \sinh u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(\sinh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + D^2(\sinh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

Тогда

$$X_2 = [X_0, X_1] = \cosh u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(\cosh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + D^2(\cosh u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

$$[X_0, [X_0, X_1]] = X_1 = \sinh u \tfrac{\partial}{\partial u_1} + D(\sinh u)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + D^2(\sinh u)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

Матрица оператора adX_0 в базисе X_1, X_2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

adX_0 имеет два собственных значения ± 1.
Рассмотрим соответствующие собственные векторы
$X_1' = X_1 + X_2$ и $X_2' = X_1 - X_2$.

$$X_1' = e^u\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + (u_1^2+u_2)\frac{\partial}{\partial u_3}+\ldots+B_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots\right),$$
$$X_2' = e^{-u}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+(u_1^2-u_2)\frac{\partial}{\partial u_3}+\ldots+B_{n-1}(-u_1,\ldots,-u_{n-1})\frac{\partial}{\partial u_n}+\ldots\right)$$

где $B_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})$ – $(n-1)$-й полный многочлен Белла.
Несколько первых многочленов Белла:

$$B_1(u_1) = u_1, B_2(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2, B_3(u_1, u_2, u_3) = u_1^3 + 3u_1u_2 + u_3,$$
$$B_4(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_1^4 + 6u_1^2u_2 + 4u_1u_3 + 3u_2^2 + u_4, \ldots$$

Порождающая функция для многочленов Белла

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i\frac{t^i}{i!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(u_1, \ldots, u_n)\frac{t^n}{n!}.$$

Уравнение Sinh-Гордона

Лемма

Алгебра Ли $\mathcal{L}ie_{\mathbb{R}}(X_1', X_2')$*, порожденная* X_1', X_2' *изоморфна* $\mathfrak{n}_1$.

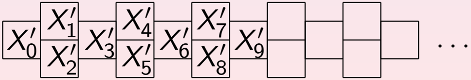
Теорема (М., УМН 2017, Algebras and Repres. Theory, 2018)

Характеристическая алгебра Ли уравнения sinh-Gordon

$$u_{xy} = \sinh u$$

изоморфна про-разрешимой подалгебре Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_1$ *аффинной алгебре Каца-Муди* $A_1^{(1)}$.

$\tilde{\mathfrak{n}}_1$:



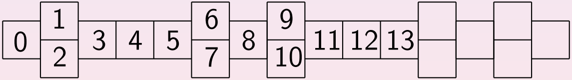
Теорема (М., УМН 2017, Algebras and Repres. Theory, 2018)

Характеристическая алгебра Ли уравнения Цицейки

$$u_{xy} = e^{u} + e^{-2u}$$

изоморфна разрешимой подалгебре Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_2$ *аффинной алгебре Каца-Муди* $A_2^{(2)}$.

$\tilde{\mathfrak{n}}_2$:



$\dots$