# О коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, соответствующие спектральным кривым рода 2

В.Н. Давлетшина

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск

Томск, 2018

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{j=0}^{n} v_j(x)\partial_x^j.$$

Условие коммутации $[L_n, L_m] = 0$ это сложная система нелинейных дифференциальных уравнений на их коэффициенты.

**Лемма (Дж. Берчналл, И. Чаунди, 1923).**

Если $L_n L_m = L_m L_n$, то существует ненулевой полином $R(z, w)$ от двух коммутирующих переменных такой, что $R(L_n, L_m) = 0$.

**Пример**

$L_2 = \partial_x^2 - \frac{2}{x^2}$, $L_3 = \partial_x^3 - \frac{3}{x^3}\partial_x + \frac{3}{x^3}$

$$L_2^3 = L_3^2, \qquad R(z, w) = z^3 - w^2.$$

## Определение

**Спектральная кривая**

$$\Gamma = \{(z, w) : R(z, w) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

Если $\psi$ – совместная собственная функция

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то $(z, w) \in \Gamma$.
Размерность пространства совместных собственных функций, для $(z, w)$ в общем положении, является общим делителем $n$ и $m$.

## Определение

*Рангом* $l$ называется наибольший общий делитель всех порядков операторов из максимального коммутативного кольца, содержащего $L_n$ и $L_m$.

# История

Коммутативные кольца дифференциальных операторов классифицированы И.М. Кричевером. В случае операторов ранга 1, совместные собственные функции выражаются через тэта-функцию многообразия Якоби спектральной кривой. Коэффициенты таких операторов являются мероморфными функциями.

Коммутирующие операторы ранга $l > 1$ классифицированы Кричевером И.М. Совместные собственные функции таких операторов отвечают спектральным данным Кричевера, но найти в явном виде собственные функции не удается.

**Ж.Диксмье:**

$$L_4 = (\partial_x^2 - x^3 + \alpha)^2 - 2x,$$

$$L_6 = (\partial_x^2 - x^3 + \alpha)^3 - \frac{3}{2}(x(\partial_x^2 - x^3 + \alpha) + (\partial_x^2 - x^3 + \alpha)x).$$

Спектральная кривая задается уравнением

$$w^2(z) = z^3 - \alpha.$$

***Операторы Диксмье были первыми примерами нетривиальных коммутирующих элементов в первой алгебре Вейля.***

# l=2, в случае эллиптической спектральной кривой

## Пример (И.М. Кричевер, С.П. Новиков)

$$\mathbf{L_4} = (\partial_x^2 + u)^2 + 2c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1))\partial_x + (c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)))_x - \wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1),$$

$$\gamma_1(x) = \gamma_0 + c(x), \quad \gamma_2(x) = \gamma_0 - c(x),$$

$$u(x) = -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{1}{2}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2} + 2\Phi(\gamma_1,\gamma_2)c_{xx} - \frac{c_{xxx}}{2c_x} + c_x^2(\Phi_x(\gamma_0 + c, \gamma_0 - c) - \Phi^2(\gamma_1,\gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2) = \zeta(\gamma_2 - \gamma_1) + \zeta(\gamma_1) - \zeta(\gamma_2).$$

Оператор $\mathbf{L_6}$ можно найти из уравнения $\mathbf{L_6^2} = 4(\mathbf{L_4})^3 + g_2\mathbf{L_4} + g_3$.

В частности, П.Г. Гриневичем среди операторов Кричевера–Новикова выделены операторы Диксмье, а А.Б. Жегловым и А.Е. Мироновым показано, что среди этих же операторов существует бесконечно много операторов с полиномиальными коэффициентами.

В случае ранга $l=3$ и эллиптической спектральной кривой операторы найдены О.И. Моховым. В работах А.Е.Миронова, А.Б. Жеглова и О.И. Мохова найдены некоторые операторы ранга $l=2$ и 3 при $g=2$, 3, 4.

**Пример (А.Е.Миронов), $l=2$**

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 g(g+1),$$

$$L_4^\dagger = (\partial_x^2 + \alpha_1 \operatorname{ch}(x) + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1) \operatorname{ch}(x),$$

При $g=\alpha_3=1,\ \alpha_2=\alpha_1=0$ операторы $L_4^\sharp$, $L_6^\sharp$ совпадают с операторами Диксмье.
Действия автоморфизмов первой алгебры Вейля на $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ изучались О.И. Моховым.
С помощью замены координат и автоморфизмов первой алгебры Вейля И.О. Моховым из операторов $L_4^\dagger$, $L_{4g+2}^\dagger$ получены некоторые примеры операторов ранга $l$.

Первая алгебра Вейля A1– это алгебра обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Группа автоморфизмов *Aut(A1)* действует на множестве решений уравнения

$$\mathbf{f(X,Y)} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j = 0, \qquad X, Y \in A_1, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

$$\varphi_1(x) = x + P_1(\partial_x), \qquad \varphi_1(\partial_x) = \partial_x,$$

$$\varphi_2(x) = x, \qquad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x + P_2(x),$$

$$\varphi_3(x) = \alpha x + \beta\partial_x, \quad \varphi_3(\partial_x) = \gamma\partial_x + \delta x, \quad \alpha\gamma - \beta\delta = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},$$

где $\mathbf{P_1}$, **P2**- некоторые полиномы.
Диксмье доказал, что любой автоморфизм *A1* является композицией автоморфизмов вида $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.
***Ю.Берест сформулировал гипотезу:*** если кривая, заданная уравнением $\mathbf{F = 0}$ имеет род $\mathbf{g = 1}$, то пространство орбит бесконечно, а если $\mathbf{g > 1}$, то для общих $\alpha_{ij}$ пространство орбит конечно.

В работе (Zheglov A.B., Mironov, A.E. Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra.// IMRN) доказано, что пространство орбит в случае произвольной эллиптической кривой

$$B^2 = A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0, \qquad A, B \in A_1, c_i \in \mathbb{C}$$

бесконечно. А также доказано, что для произвольного $g$ существует уравнение вида

$$B^2 = A^{2g+1} + c_{2g}A^{2g} + \ldots + c_1A + c_0$$

с бесконечным числом орбит.

## Теорема (Д, А.Е. Миронов)

Оператор

$$L_4^{\flat} = ((\alpha_1 x^2 + 1)\partial_x^2 + (\alpha_2 x + \alpha_3)\partial_x + \alpha_4 x + \alpha_5)^2 + \alpha_1\alpha_4 g(g+1)x + \alpha_6$$

коммутирует с оператором $L_{10}^{\flat}$, $g = 2$ для любых $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
Пара $L_4^{\flat}, L_{10}^{\flat}$ является решением

$$Y^2 = X^5 + c_4X^4 + c_3X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, \quad X, Y \in A_1, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

где $c_i$ полиномиально зависят от $\alpha_i$ (см. приложение).
Множество орбит группы $\mathrm{Aut}(A_1)$ в пространстве решений уравнения с общими $c_i$ бесконечно.

Также проверено, что $L_4^{\flat}$ коммутирует с $L_6^{\flat}$ в случае $g = 1$ и с $L_{14}^{\flat}$ в случае $g = 3$.

## Гипотеза (Д, А.Е. Миронов)

Оператор $L_4^{\flat}$ коммутирует с оператором порядка $4g + 2$

$$L_4^\flat = ((\alpha_1 x^2+1)\partial_x^2 + (\alpha_2 x+\alpha_3)\partial_x + \alpha_4 x + \alpha_5)^2 + \alpha_1\alpha_4 g(g+1)x + \alpha_6,$$

$$L_{10}^\flat = P^5 + \left(\frac{5}{2}\alpha_1(6x\alpha_4+\alpha_2+2\alpha_5) + 3\alpha_1^2 - \frac{5\alpha_2^2}{4}\right)P^3 + 45\alpha_1\alpha_4(x^2\alpha_1+1)P^2 +$$

$$+\frac{15}{2}\alpha_1\alpha_4\left(34x\alpha_1+3\left(x\alpha_2+\alpha_3\right)\right)P^2\partial_x - 30\alpha_1\alpha_4\left(2x^2\alpha_1^2+\alpha_1(3x^2\alpha_2+6x\alpha_3-10)-3\alpha_2\right)P\partial_x +$$

$$+q_2P + q_1\partial_x + q_0,$$

$$P = (\alpha_1 x^2+1)\partial_x^2 + (\alpha_2 x+\alpha_3)\partial_x + \alpha_4 x + \alpha_5,$$

$$q_0 = 15x^2(\alpha_1+3\alpha_2)\alpha_4^2\alpha_1^2 + \frac{3}{2}x\alpha_4\left(6\alpha_1^2 + (13\alpha_2-64\alpha_5)\alpha_1 - 60\alpha_3\alpha_4 +\right.$$

$$\left.+6\alpha_2(\alpha_2+20\alpha_5)\right)\alpha_1^2 + \frac{3}{2}\alpha_4\left(9\alpha_3\alpha_1^2 + (8\alpha_2\alpha_3+60\alpha_5\alpha_3+58\alpha_4)\alpha_1 + 30\alpha_2\alpha_4\right)\alpha_1,$$

$$q_1 = 15x^2\alpha_4\left(5\alpha_1^2 + 4(\alpha_2+3\alpha_5)\alpha_1 + 3\alpha_2^2\right)\alpha_1^2 - 30x\alpha_4\left((2\alpha_1-3\alpha_2)\alpha_3 + 12\alpha_4\right)\alpha_1^2 +$$

$$+15\alpha_4\left(5\alpha_1^2 + 2(3\alpha_3^2+4\alpha_2-6\alpha_5)\alpha_1 + 3\alpha_2^2\right)\alpha_1,$$

$$q_2 = -135x^2\alpha_1^2\alpha_4^2 + \frac{15}{2}x\alpha_1\left(18\alpha_1^2 - 2(9\alpha_2+14\alpha_5)\alpha_1 + \alpha_2^2\right)\alpha_4 + \frac{1}{4}\left(\alpha_2^4 + 6\alpha_1^3(\alpha_2+2\alpha_5) +\right.$$

$$\left.+\alpha_1(-4\alpha_2^3 - 8\alpha_5\alpha_2^2 + 54\alpha_3\alpha_4\alpha_2 + 252\alpha_4^2) + \alpha_1^2(\alpha_2^2 + 16\alpha_5\alpha_2 + 16\alpha_5^2 - 228\alpha_3\alpha_4)\right).$$

Уравнение спектральной кривой операторов: $w^2 = z^5 + c_4z^4 + c_3z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$.