Уравнение Кортевега–де Фриза и задача дифференцирования абелевых функций по параметрам

Е. Ю. Бунькова

Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН

Декабрьские чтения в Томске

15 декабря 2018

Абелевы функции

Абелева функция — это мероморфная функция в $\mathbb{C}^g$ с решёткой периодов $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$ ранга $2g$. Мы говорим, что Абелева функция — это мероморфная функция на комплексном торе $T^g = \mathbb{C}^g/\Gamma$.

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин,
"Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n,s)-кривых",
Функц. анализ и его прил., 42:4 (2008), 24–36.

Обозначим координаты в $\mathbb{C}^g$ за $z = (z_1, z_3, \dots, z_{2g-1})$.

Гиперэллиптические функции

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую рода g в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 : \\ Y^2 = X^{2g+1} + \lambda_4 X^{2g-1} + \lambda_6 X^{2g-2} + \ldots + \lambda_{4g} X + \lambda_{4g+2}\}.$$

Она зависит от параметров $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$. $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{2g}$ задаётся условием, что $\mathcal{V}_\lambda$ невырождена для $\lambda \in \mathcal{B}$. Имеем $\mathcal{B} = \mathbb{C}^{2g} \backslash \Sigma$, где Σ — дискриминантная кривая.

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}_\lambda} \\ \mathcal{B} \end{array}$$

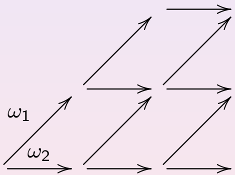
Гиперэллиптическая функция рода g — это мероморфная функция в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B}$, такая что для любого $\lambda \in \mathcal{B}$ её ограничение на $\mathbb{C}^g \times \lambda$ является Абелевой функцией с T^g — Якобианом $\mathcal{J}_\lambda$ кривой $\mathcal{V}_\lambda$.

Обозначим поле гиперэллиптических функций рода g за $\mathcal{F}$.

Пример: Род 1.

Абелевы функции = *эллиптические функции.*
Эллиптическая функция с решёткой Γ — мероморфная функция $f(z)$ в $\mathbb{C}$, такая что для любого $\omega \in \Gamma$

$$f(z+\omega) = f(z).$$



Эллиптическую функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = Q(\wp(z)) + R(\wp(z))\wp'(z)$ для рациональных $Q(x), R(x)$.

Уравнение Вейерштрасса $\quad \wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$

$$\mathbb{C}/\Gamma \quad \longleftrightarrow \quad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \quad \longleftrightarrow \quad y^2 = x^3 + \lambda_4 x + \lambda_6$$

Функции Вейерштрасса $\sigma(z)$, $\zeta(z)$

ζ-**функция Вейерштрасса** определяется соотношениями

$$\zeta(z; g_2, g_3)' = -\wp(z; g_2, g_3), \qquad \lim_{z\to 0}(z\zeta(z)) = 1.$$

$$\zeta(z+\omega_k) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_k/2).$$

σ-**функция Вейерштрасса** определяется соотношениями

$$\big(\ln\sigma(z; g_2, g_3)\big)' = \zeta(z; g_2, g_3), \qquad \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right) = 1.$$

$$\sigma(z+\omega_k) = -\exp(\zeta(\omega_k/2)(2z+\omega_k))\sigma(z).$$

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

$$\updownarrow$$

$$y^2 = x^3 + \lambda_4 x + \lambda_6$$

F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., 92 (1882), 311–337.

$$\mathcal{L}_0 = L_0 - z\partial_z, \qquad \mathcal{L}_1 = \partial_z, \qquad \mathcal{L}_2 = L_2 - \zeta(z;\lambda_4,\lambda_6)\partial_z.$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \downarrow {\scriptstyle \mathbb{C}/\Gamma} \\ \mathcal{B} \end{array}$$

Поля L_k на $\mathcal{B}$:

$$L_0 = 4\lambda_4 \frac{\partial}{\partial\lambda_4} + 6\lambda_6 \frac{\partial}{\partial\lambda_6}, \qquad L_2 = 6\lambda_6 \frac{\partial}{\partial\lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2 \frac{\partial}{\partial\lambda_6}.$$

Алгебра Ли:

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] = \mathcal{L}_1, \qquad [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2] = 2\mathcal{L}_2, \qquad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = \wp(z;\lambda_4,\lambda_6)\mathcal{L}_1.$$

Гиперэллиптические функции

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую рода g в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : \\ Y^2 = X^{2g+1} + \lambda_4 X^{2g-1} + \lambda_6 X^{2g-2} + \ldots + \lambda_{4g} X + \lambda_{4g+2}\}.$$

Она зависит от параметров $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$.
$\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{2g}$ задаётся условием, что $\mathcal{V}_\lambda$ невырождена для $\lambda \in \mathcal{B}$.
Имеем $\mathcal{B} = \mathbb{C}^{2g} \backslash \Sigma$, где Σ — дискриминантная кривая.

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \big\downarrow \mathcal{J}_\lambda \\ \mathcal{B} \end{array}$$

Гиперэллиптическая функция рода g — это мероморфная функция в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B}$, такая что для любого $\lambda \in \mathcal{B}$ её ограничение на $\mathbb{C}^g \times \lambda$ является Абелевой функцией с T^g — Якобианом $\mathcal{J}_\lambda$ кривой $\mathcal{V}_\lambda$.

Обозначим поле гиперэллиптических функций рода g за $\mathcal{F}$.

Задача дифференцирования гиперэллиптических функций

Для рода g описать алгебру Ли $\operatorname{Der}\mathcal{F}$ *дифференцирований* $\mathcal{F}$. *Найти* $3g$ *независимых дифференциальных операторов* $\mathcal{L}$, *таких что* $\mathcal{L}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин,
“Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n,s)-кривых”,
Функц. анализ и его прил., 42:4 (2008), 24–36.

В. М. Бухштабер,
Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза, Тр. МИАН, 294 (2016), 191–215.

Elena Yu. Bunkova,
Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions,
European Journal of Mathematics, 4:1 (2018), 93–112.

Полиномиальное отображение

В. М. Бухштабер,
Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза, Тр. МИАН, 294 (2016), 191–215.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^{3g} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^{2g} \end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_3 & \dots & \mathcal{L}_{2g-1} \\ \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_2 & \dots & \mathcal{L}_{4g-2} \end{matrix}$$

Отображение φ будет задано набором образующих в $\mathcal{F}$, а p будет полиномиальным отображением.

Перейдём к построению φ и p.

Гиперэллиптические функции Клейна

Возьмём координаты $(z, \lambda) =$
$= (z_1, z_3, \ldots, z_{2g-1}, \lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2})$ в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{3g}$.
Пусть $\sigma(z, \lambda)$ — гиперэллиптическая сигма-функция.
Обозначим $\frac{\partial}{\partial z_k} = \partial_k$. Будем использовать обозначения

$$\zeta_k = \partial_k \ln \sigma(z, \lambda), \qquad \wp_{i;k_1,\ldots,k_n} = -\partial_1^i \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_n} \ln \sigma(z, \lambda),$$

где $n \geqslant 0$, $i + n \geqslant 2$, $k_s \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$.

Функции $\wp_{i;k_1,\ldots,k_n}$ являются гиперэллиптическими.

V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin,
Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications,
Reviews in Mathematics and Math. Physics, 10:2, (1997).

Отображение φ

Обозначим координаты в $\mathbb{C}^{3g}$ за $(x_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 2g-1$.

$$\mathcal{U} \overset{\varphi}{\dashrightarrow} \mathbb{C}^{3g} \; : \qquad (z,\lambda) \mapsto \begin{pmatrix} \wp_{1;1} & \wp_{1;3} & \cdots & \wp_{1;2g-1} \\ \wp_{2;1} & \wp_{2;3} & \cdots & \wp_{2;2g-1} \\ \wp_{3;1} & \wp_{3;3} & \cdots & \wp_{3;2g-1} \end{pmatrix}.$$

Теорема

Функции $\varphi^*(x_{i,j})$ задают набор образующих в $\mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^{3g} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^{2g} \end{tikzcd}$$

V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications*, Reviews in Mathematics and Math. Physics, 10:2, (1997).

Для $i, k \in \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$ имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
\wp_{3;i} =& 6\wp_2\wp_{1;i} + 6\wp_{1;i+2} - 2\wp_{0;3,i} + 2\lambda_4\delta_{i,1}, \\
\wp_{2;i}\wp_{2;k} =& 4\left(\wp_2\wp_{1;i}\wp_{1;k} + \wp_{1;k}\wp_{1;i+2} + \wp_{1;i}\wp_{1;k+2} + \wp_{0;k+2,i+2}\right) - \\
& - 2(\wp_{1;i}\wp_{0;3,k} + \wp_{1;k}\wp_{0;3,i} + \wp_{0;k,i+4} + \wp_{0;i,k+4}) + \\
& + 2\lambda_4(\delta_{i,1}\wp_{1;k} + \delta_{k,1}\wp_{1;i}) + 2\lambda_{i+k+4}(2\delta_{i,k} + \delta_{k,i-2} + \delta_{i,k-2}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\wp_{3;i} =& 6\wp_2\wp_{1;i} + 6\wp_{1;i+2} - 2\wp_{0,3;i} + 2\lambda_4\delta_{i,1},\\
\wp_{2;i}\wp_{2;k} =& 4\left(\wp_2\wp_{1;i}\wp_{1;k} + \wp_{1;k}\wp_{1;i+2} + \wp_{1;i}\wp_{1;k+2} + \wp_{;k+2,i+2}\right) -\\
& - 2(\wp_{1;i}\wp_{;3,k} + \wp_{1;k}\wp_{;3,i} + \wp_{;k,i+4} + \wp_{;i,k+4}) +\\
& + 2\lambda_4(\delta_{i,1}\wp_{1;k} + \delta_{k,1}\wp_{1;i}) + 2\lambda_{i+k+4}(2\delta_{i,k} + \delta_{k,i-2} + \delta_{i,k-2}).
\end{aligned}
$$

Следствие

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}}$,

$$\varphi : (z, \lambda) \mapsto (x_{i,j}, w_{k,l}, \lambda_s) = (\wp_{i;j}, \wp_{0;k,l}, \lambda_s).$$

Образ φ *лежит в* $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}}$,
где $\mathcal{S}$ *определяется набором из* $\frac{g(g+3)}{2}$ *уравнений.*

Теорема

Проекция $\pi_1\colon \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}} \to \mathbb{C}^{3g}$ *на первые* $3g$ *координат даёт изоморфизм* $\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}^{3g}$.

Следствие

Проекция $\pi_3\colon \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}} \to \mathbb{C}^{2g}$ *на последние* $2g$ *координат даёт полиномиальное отображение* $p\colon \mathbb{C}^{3g} \to \mathbb{C}^{2g}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^{\frac{g(g+9)}{2}} \arrow[r, equal] & \mathbb{C}^{3g} \times \mathbb{C}^{\frac{g(g-1)}{2}} \times \mathbb{C}^{2g} \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[ddl, bend left, "\pi_3"] \\
\mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{S} \simeq \mathbb{C}^{3g} \arrow[u, hook] \arrow[d, "p"] & \\
\mathcal{B} \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^{2g} &
\end{tikzcd}
$$

Задача дифференцирования гиперэллиптических функций

Для рода g описать алгебру Ли $\operatorname{Der}\mathcal{F}$ дифференцирований $\mathcal{F}$. Найти $3g$ независимых дифференциальных операторов $\mathcal{L}$, таких что $\mathcal{L}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^{3g} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^{2g} \end{tikzcd}$$

Обозначим кольцо полиномов в $\lambda \in \mathbb{C}^{2g}$ за $\mathcal{P}$. Векторное поле $\mathcal{L}$ в $\mathbb{C}^{3g}$ называется *проектируемым* для p если существует L в $\mathbb{C}^{2g}$ такое что $\mathcal{L}(p^* f) = p^* L(f)$ для любого $f \in \mathcal{P}$.

Задача дифференцирования гиперэллиптических функций

1. *Найти $3g$ полиномиальных векторных полей в $\mathbb{C}^{3g}$, проектируемых для $p\colon \mathbb{C}^{3g} \to \mathbb{C}^{2g}$ и независимых в $p^{-1}(\mathcal{B})$.*
2. *Построить их полиномиальную алгебру Ли.*

F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., 92 (1882), 311–337.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= L_0 - z\partial_1, \\ \mathcal{L}_1 &= \partial_1, \\ \mathcal{L}_2 &= L_2 - \zeta_1(z;\lambda_4,\lambda_6)\partial_1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \big\downarrow \mathbb{C}/\Gamma \\ \mathcal{B} \end{array}$$

Поля L_k на $\mathcal{B}$:

$$L_0 = 4\lambda_4 \frac{\partial}{\partial\lambda_4} + 6\lambda_6 \frac{\partial}{\partial\lambda_6}, \qquad L_2 = 6\lambda_6 \frac{\partial}{\partial\lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2 \frac{\partial}{\partial\lambda_6}.$$

Алгебра Ли:

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] = \mathcal{L}_1, \qquad [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2] = 2\mathcal{L}_2, \qquad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = \wp_2(z;\lambda_4,\lambda_6)\mathcal{L}_1.$$

Род 1: полиномиальная версия

Положим $x_2 = x_{1,1}$, $x_3 = x_{2,1}$, $x_4 = x_{3,1}$.
Проекция p имеет вид

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}x_4 - 3x_2^2, \qquad \lambda_6 = \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_4 + 2x_2^3.$$

Векторные поля

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 \\ \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 & 3x_3 & 4x_4 \\ x_3 & x_4 & 12x_2x_3 \\ \frac{2}{3}x_4 - 2x_2^2 & 3x_2x_3 & 2x_2x_4 + 3x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \\ \partial_{x_4} \end{pmatrix}$$

Полиномиальная алгебра Ли

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] = \mathcal{L}_1, \quad [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_2] = 2\mathcal{L}_2, \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = x_2\mathcal{L}_1.$$

Полиномиальные векторные поля нечётной градуировки

$$\mathcal{L}_1 = \sum_j x_{2,j}\frac{\partial}{\partial x_{1,j}} + x_{3,j}\frac{\partial}{\partial x_{2,j}} + 4(2x_2x_{2,j} + x_3x_{1,j} + x_{2,j+2})\frac{\partial}{\partial x_{3,j}}$$

где $x_{2,2g+1} = 0$. Для $s = 3, 5, \ldots, 2g-1$

$$\mathcal{L}_s = x_{2,s}\frac{\partial}{\partial x_2} + x_{3,s}\frac{\partial}{\partial x_3} + \mathcal{L}_1(x_{3,s})\frac{\partial}{\partial x_4} + \\ + \sum_{k=1}^{g-1} y_{1,s,2k+1}\frac{\partial}{\partial x_{1,2k+1}} + \mathcal{L}_1(y_{1,s,2k+1})\frac{\partial}{\partial x_{2,2k+1}} + \\ + \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(y_{1,s,2k+1}))\frac{\partial}{\partial x_{3,2k+1}}.$$

для некоторого $y_{1,s,2k+1} = \mathcal{L}_s(x_{1,2k+1})$.

Уравнение Кортевега–де Фриза

Уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

Пусть $x = z_1, \quad -4t = z_3, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2}u, \quad \Phi_4 = -\frac{3}{2}\Phi_2^2 + \frac{1}{4}\partial_1^2\Phi_2.$
Уравнение Кортевега–де Фриза принимает вид

$$\partial_3\Phi_2 = \partial_1\Phi_4.$$

Для $g = 1$ получаем $\partial_3\Phi_2 = 0$. Для $x_2 = \Phi_2 \Rightarrow \partial_1 x_4 = 12x_2x_3$.

Для $g = 2$ имеем $\partial_1 x_{1,3} = \partial_1\Phi_4$ и Φ_4 – дифференциальный полином от $x_2 = \Phi_2 \Rightarrow$ получаем $\mathcal{L}_3(x_{1,3}) = \mathcal{L}_3(-\frac{3}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}x_4)$.

Иерархия уравнения Кортевега–де Фриза

$$\partial_{2k-1}\Phi_2 = \partial_1\Phi_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\partial_1\Phi_{2k+2} = \mathcal{R}\partial_1\Phi_{2k} \quad \text{для} \quad \mathcal{R} = \frac{1}{4}\partial_1^2 - 2\Phi_2 - \Phi_2'\partial_1^{-1}.$$

В. М. Бухштабер, “Уравнение Кортевега–де Фриза и теория гиперэллиптических функций”, 19 ноября 2018.

Теорема ($\star$)

Функция $\Phi_2 = \wp_2(z)$ удовлетворяет иерархии уравнения КдФ.

$\star$ V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, Hyperelliptic Kleinian functions and applications, Adv. Math. Sci., AMS Transl., 179:2, 1997, 1–34.

Полиномиальные векторные поля в $\mathcal{B}$

Возьмём в $\mathbb{C}^{2g}$ координаты $(\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2})$.
Положим $\lambda_s = 0$ для $s \notin \{4, 6, \ldots, 4g, 4g+2\}$.
Для $k, m \in \{1, 2, \ldots, 2g\}$, $k \leqslant m$ положим

$$T_{2k,2m} = 2(k+m)\lambda_{2k+2m} + \sum_{s=2}^{k-1} 2(k+m-2s)\lambda_{2s}\lambda_{2k+2m-2s} - \\ - \frac{2k(2g-m+1)}{2g+1}\lambda_{2k}\lambda_{2m},$$

для $k > m$ положим $T_{2k,2m} = T_{2m,2k}$.
Для $k = 0, 1, 2, \ldots, 2g-1$ получаем векторные поля

$$L_{2k} = \sum_{s=2}^{2g+1} T_{2k+2,2s-2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{2s}}.$$

Род 2: полиномиальное отображение p

Проекция p принимает вид

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= -3x_2^2 + \frac{1}{2}x_4 - 2x_{1,3},\\
\lambda_8 &= -\frac{1}{2}(x_4x_{1,3} - x_3x_{2,3} + x_2x_{3,3}) + \left(4x_2^2 + x_{1,3}\right)x_{1,3},\\
\lambda_6 &= 2x_2^3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_4 - 2x_2x_{1,3} + \frac{1}{2}x_{3,3},\\
\lambda_{10} &= 2x_2x_{1,3}^2 + \frac{1}{4}x_{2,3}^2 - \frac{1}{2}x_{1,3}x_{3,3}.
\end{aligned}$$

Род 2: образующие

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$$

$$\mathcal{L}_1 = \partial_1,$$
$$\mathcal{L}_3 = \partial_3,$$

$$\mathcal{L}_0 = L_0 - z_1\partial_1 - 3z_3\partial_3,$$
$$\mathcal{L}_2 = L_2 + \left(-\zeta_1 + \frac{4}{5}\lambda_4 z_3\right)\partial_1 - z_1\partial_3,$$
$$\mathcal{L}_4 = L_4 + \left(-\zeta_3 + \frac{6}{5}\lambda_6 z_3\right)\partial_1 - (\zeta_1 + \lambda_4 z_3)\,\partial_3,$$
$$\mathcal{L}_6 = L_6 + \frac{3}{5}\lambda_8 z_3\partial_1 - \zeta_3\partial_3.$$

Род 2: алгебра Ли

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_k] = k\mathcal{L}_k, \quad k = 1,2,3,4,6, \qquad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_3] = 0,$$

$$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = \wp_2\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3, \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_4] = \wp_{1;3}\mathcal{L}_1 + \wp_2\mathcal{L}_3, \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_6] = \wp_{1;3}\mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2] = \left(\wp_{1;3} + \frac{4}{5}\lambda_4\right)\mathcal{L}_1, \qquad [\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_6] = \frac{3}{5}\lambda_8\mathcal{L}_1 + \wp_{0;3,3}\mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4] = \left(\wp_{0;3,3} + \frac{6}{5}\lambda_6\right)\mathcal{L}_1 + (\wp_{1;3} - \lambda_4)\mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4] = \frac{8}{5}\lambda_6\mathcal{L}_0 - \frac{8}{5}\lambda_4\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_6 - \frac{1}{2}\wp_{2;3}\mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}\wp_3\mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_6] = \frac{4}{5}\lambda_8\mathcal{L}_0 - \frac{4}{5}\lambda_4\mathcal{L}_4 - \frac{1}{2}\wp_{1;3,3}\mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}\wp_{2;3}\mathcal{L}_3,$$

$$[\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_6] = -2\lambda_{10}\mathcal{L}_0 + \frac{6}{5}\lambda_8\mathcal{L}_2 - \frac{6}{5}\lambda_6\mathcal{L}_4 + 2\lambda_4\mathcal{L}_6 - \frac{1}{2}\wp_{0;3,3,3}\mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}\wp_{1;3,3}\mathcal{L}_3.$$

$$
\begin{pmatrix} [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0] \\ [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] \\ [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_4] \\ [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_6] \\ [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_8] \\ [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{10}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \wp_2 & -1 & 0 \\ \wp_{1;3} & \wp_2 & -1 \\ \wp_{1;5} & \wp_{1;3} & \wp_2 \\ 0 & \wp_{1;5} & \wp_{1;3} \\ 0 & 0 & \wp_{1;5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_5 \end{pmatrix},
$$

Elena Yu. Bunkova,
Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions,
European Journal of Mathematics, 4:1 (2018), 93–112.

Род 3: полиномиальное отображение p

$$
\begin{aligned}
\lambda_4 &= -3x_2^2 + \frac{1}{2}x_4 - 2x_{1,3},\\
\lambda_6 &= 2x_2^3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_4 - 2x_2x_{1,3} + \frac{1}{2}x_{3,3} - 2x_{1,5},\\
\lambda_8 &= 4x_2^2x_{1,3} - \frac{1}{2}(x_4x_{1,3} - x_3x_{2,3} + x_2x_{3,3}) + x_{1,3}^2 - 2x_2x_{1,5} + \frac{1}{2}x_{3,5},\\
\lambda_{10} &= 2x_2x_{1,3}^2 + \frac{1}{4}x_{2,3}^2 - \frac{1}{2}x_{1,3}x_{3,3} -\\
&\qquad - \frac{1}{2}(x_4x_{1,5} - x_3x_{2,5} + x_2x_{3,5}) + \left(4x_2^2 + 2x_{1,3}\right)x_{1,5},\\
\lambda_{12} &= 4x_2x_{1,3}x_{1,5} - \frac{1}{2}(x_{3,3}x_{1,5} - x_{2,3}x_{2,5} + x_{1,3}x_{3,5}) + x_{1,5}^2,\\
\lambda_{14} &= 2x_2x_{1,5}^2 + \frac{1}{4}x_{2,5}^2 - \frac{1}{2}x_{1,5}x_{3,5}.
\end{aligned}
$$

Род 3: образующие

$$\mathcal{L}_1 = \partial_1, \qquad \mathcal{L}_3 = \partial_3, \qquad \mathcal{L}_5 = \partial_5,$$
$$\mathcal{L}_0 = L_0 - z_1\partial_1 - 3z_3\partial_3 - 5z_5\partial_5,$$
$$\mathcal{L}_2 = L_2 - \left(\zeta_1 - \frac{8}{7}\lambda_4 z_3\right)\partial_1 - \left(z_1 - \frac{4}{7}\lambda_4 z_5\right)\partial_3 - 3z_3\partial_5,$$
$$\mathcal{L}_4 = L_4 - \left(\zeta_3 - \frac{12}{7}\lambda_6 z_3\right)\partial_1 - \left(\zeta_1 + \lambda_4 z_3 - \frac{6}{7}\lambda_6 z_5\right)\partial_3 - (z_1 + 3\lambda_4 z_5)\partial_5,$$
$$\mathcal{L}_6 = L_6 - \left(\zeta_5 - \frac{9}{7}\lambda_8 z_3\right)\partial_1 - \left(\zeta_3 - \frac{8}{7}\lambda_8 z_5\right)\partial_3 - \left(\zeta_1 + \lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5\right)\partial_5,$$
$$\mathcal{L}_8 = L_8 + \left(\frac{6}{7}\lambda_{10} z_3 - \lambda_{12} z_5\right)\partial_1 - \left(\zeta_5 - \frac{10}{7}\lambda_{10} z_5\right)\partial_3 - \left(\zeta_3 + \lambda_8 z_5\right)\partial_5,$$
$$\mathcal{L}_{10} = L_{10} + \left(\frac{3}{7}\lambda_{12} z_3 - 2\lambda_{14} z_5\right)\partial_1 + \frac{5}{7}\lambda_{12} z_5\partial_3 - \zeta_5\partial_5.$$

Род 3: алгебра Ли

$$[\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_k]=k\mathcal{L}_k,\quad [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_3]=0,\quad [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_5]=0,\quad [\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_5]=0,$$

$$\begin{pmatrix}[\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2]\\ [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_4]\\ [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_6]\\ [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_8]\\ [\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_{10}]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\wp_2 & -1 & 0\\ \wp_{1;3} & \wp_2 & -1\\ \wp_{1;5} & \wp_{1;3} & \wp_2\\ 0 & \wp_{1;5} & \wp_{1;3}\\ 0 & 0 & \wp_{1;5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1\\ \mathcal{L}_3\\ \mathcal{L}_5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}[\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_2]\\ [\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_4]\\ [\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_6]\\ [\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_8]\\ [\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_{10}]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\wp_{1;3}-\lambda_4 & 0 & -3\\ \wp_{0;3,3} & \wp_{1;3}-\lambda_4 & 0\\ \wp_{0;3,5} & \wp_{0;3,3} & \wp_{1;3}-\lambda_4\\ 0 & \wp_{0;3,5} & \wp_{0;3,3}\\ 0 & 0 & \wp_{0;3,5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{L}_1\\ \mathcal{L}_3\\ \mathcal{L}_5\end{pmatrix}+\frac{3}{7}\begin{pmatrix}5\lambda_4\\ 4\lambda_6\\ 3\lambda_8\\ 2\lambda_{10}\\ \lambda_{12}\end{pmatrix}\mathcal{L}_1,$$

Род 3: алгебра Ли

$$\begin{pmatrix} [\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_2] \\ [\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_4] \\ [\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6] \\ [\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_8] \\ [\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_{10}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \wp_{1;5} & 0 & 0 \\ \wp_{0;3,5} & \wp_{1;5} & 0 \\ \wp_{0;5,5} & \wp_{0;3,5} & \wp_{1;5} \\ -\lambda_{12} & \wp_{0;5,5} & \wp_{0;3,5} \\ -2\lambda_{14} & -\lambda_{12} & \wp_{0;5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_5 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 2\lambda_4 \\ 3\lambda_6 \\ 4\lambda_8 \\ 5\lambda_{10} \\ 6\lambda_{12} \end{pmatrix} \mathcal{L}_3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3\lambda_4 \\ 2\lambda_6 \\ \lambda_8 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{L}_5,$$

$$\begin{pmatrix} [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4] \\ [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_6] \\ [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_8] \\ [\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{10}] \\ [\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_6] \\ [\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_8] \\ [\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_{10}] \\ [\mathcal{L}_6, \mathcal{L}_8] \\ [\mathcal{L}_6, \mathcal{L}_{10}] \\ [\mathcal{L}_8, \mathcal{L}_{10}] \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_4 \\ \mathcal{L}_6 \\ \mathcal{L}_8 \\ \mathcal{L}_{10} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\wp_{2;3} & \wp_3 & 0 \\ -\wp_{1;3,3} - \wp_{2;5} & \wp_{2;3} & \wp_3 \\ -2\wp_{1;3,5} & \wp_{2;5} & \wp_{2;3} \\ -\wp_{1;5,5} & 0 & \wp_{2;5} \\ -\wp_{0;3,3,3} & \wp_{1;3,3} - 2\wp_{2;5} & 2\wp_{2;3} \\ -2\wp_{0;3,3,5} & 0 & 2\wp_{1;3,3} \\ -\wp_{0;3,5,5} & -\wp_{1;5,5} & 2\wp_{1;3,5} \\ -2\wp_{0;3,5,5} & 2\wp_{1;5,5} - \wp_{0;3,3,5} & \wp_{0;3,3,3} \\ -\wp_{0;5,5,5} & -\wp_{0;3,5,5} & \wp_{0;3,3,5} + \wp_{1;5,5} \\ 0 & -\wp_{0;5,5,5} & \wp_{0;3,5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_5 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{pmatrix}
[L_2, L_4] \\ [L_2, L_6] \\ [L_2, L_8] \\ [L_2, L_{10}] \\ [L_4, L_6] \\ [L_4, L_8] \\ [L_4, L_{10}] \\ [L_6, L_8] \\ [L_6, L_{10}] \\ [L_8, L_{10}]
\end{pmatrix}
= \frac{2}{7}
\underbrace{\begin{pmatrix}
8\lambda_6 & -8\lambda_4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
6\lambda_8 & 0 & -6\lambda_4 & 0 & 14 & 0 \\
4\lambda_{10} & 0 & 0 & -4\lambda_4 & 0 & 21 \\
2\lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & -2\lambda_4 & 0 \\
-7\lambda_{10} & 9\lambda_8 & -9\lambda_6 & 7\lambda_4 & 0 & 7 \\
-14\lambda_{12} & 6\lambda_{10} & 0 & -6\lambda_6 & 14\lambda_4 & 0 \\
-21\lambda_{14} & 3\lambda_{12} & 0 & 0 & -3\lambda_6 & 21\lambda_4 \\
-7\lambda_{14} & -7\lambda_{12} & 8\lambda_{10} & -8\lambda_8 & 7\lambda_6 & 7\lambda_4 \\
0 & -14\lambda_{14} & 4\lambda_{12} & 0 & -4\lambda_8 & 14\lambda_6 \\
0 & 0 & -7\lambda_{14} & 5\lambda_{12} & -5\lambda_{10} & 7\lambda_8
\end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ \mathcal{M}.}}
\begin{pmatrix}
L_0 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_6 \\ L_8 \\ L_{10}
\end{pmatrix}
$$

Уравнения теплопроводности в неголономном репере

Для данных линейных дифференциальных операторов

$$L_i = \sum_{k=0}^{n} v_{i,k}(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda_k}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

задающих неголономный репер, найти линейные дифференциальные операторы второго порядка вида

$$H_i = \delta^{(i)}(\lambda) + \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{m}\left(\alpha_{a,b}^{(i)}(\lambda)\partial_{a,b} + 2\beta_{a,b}^{(i)}(\lambda)z_a\partial_b + \gamma_{a,b}^{(i)}(\lambda)z_a z_b\right),$$

такие, что система уравнений $L_i(\psi) = H_i(\psi)$ совместна, то есть имеет ненулевое решение.

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин,
“Уравнения теплопроводности в неголономном репере”,
Функц. анализ и его прил., 38:2 (2004), 12–27.

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин,
“Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n,s)-кривых”,
Функц. анализ и его прил., 42:4 (2008), 24–36.

Уравнение теплопроводности в неголономном репере на сигма-функцию Клейна

$$\downarrow$$

Решение задачи дифференцирования гиперэллиптических функций

Уравнения теплопроводности в неголономном репере для рода g=3

$$L_k(\sigma) = H_k(\sigma), \text{ где } L_k \text{ заданы ранее,}$$

$$H_0 = z_1\partial_1 + 3z_3\partial_3 + 5z_5\partial_5 + c_0,$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\partial_1^2 - \frac{8}{7}\lambda_4 z_3\partial_1 + \left(z_1 - \frac{4}{7}\lambda_4 z_5\right)\partial_3 + 3z_3\partial_5 +$$

$$-\frac{5}{14}\lambda_4 z_1^2 + \left(\frac{3}{2}\lambda_8 - \frac{4}{7}\lambda_4^2\right) z_3^2 + \left(\frac{5}{2}\lambda_{12} - \frac{2}{7}\lambda_4\lambda_8\right) z_5^2,$$

$$H_4 = \partial_1\partial_3 - \frac{12}{7}\lambda_6 z_3\partial_1 + \left(\lambda_4 z_3 - \frac{6}{7}\lambda_6 z_5\right)\partial_3 + (z_1 + 3\lambda_4 z_5)\,\partial_5 - \frac{2}{7}\lambda_6 z_1^2 +$$

$$+ \lambda_8 z_1 z_3 + \left(3\lambda_{10} - \frac{6}{7}\lambda_4\lambda_6\right) z_3^2 + 3\lambda_{12} z_3 z_5 + \left(5\lambda_{14} - \frac{3}{7}\lambda_6\lambda_8\right) z_5^2 + c_4\lambda_4,$$

$$\ldots, \qquad \text{для некоторых постоянных } c_0, c_4.$$